Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Das Zentrum einer Gruppe G ist die Menge $Z(G) = \{a \in G \mid \forall b \in G : a \cdot b = b \cdot a\}$. Bestimmen Sie das Zentrum der orthogonalen Gruppe $\mathcal{O}(2, \mathbb{R}) = \{A \in GL_2(\mathbb{R}) \,|A^t A = E_2\}$ über den reellen Zahlen.

(6 Punkte)

Aufgabe 2:

Zeigen Sie, dass in der symmetrischen Gruppe S_5 alle Untergruppen der Ordnung 8 zur Diedergruppe D_4 (der Symmetriegruppe eines Quadrates) isomorph sind.

(6 Punkte)

Aufgabe 3:

Die Teilmenge $R = \{q \in \mathbb{Q} \mid \exists \;\; a, b \in \mathbb{Z} : q = \frac{a}{b}$ und $2 \nmid b$ und $3 \nmid b\}$ des Körpers der rationalen Zahlen ist ein Unterring, der die ganzen Zahlen enthält.

a) Bestimmen Sie die Einheiten-Gruppe $R^\times$.

b) Zeigen Sie, dass 2 und 3 Primelemente von R sind.

c) Zeigen Sie, dass jedes Primelement entweder zu 2 oder zu 3 assoziiert ist. (Begriff *assoziiert*: Zwei Elemente $x, y \in R$ sind zueinander assoziiert, wenn es eine Einheit u gibt mit $x = u \cdot y$.)

(6 Punkte)

Aufgabe 4:

Gegeben ist das Polynom $P = X^2 + 3 \cdot X + 1 \in \mathbb{Z}[X]$. Bestimmen Sie

a) die Nullstellen von P modulo 5,

b) die Nullstellen von P modulo 11,

c) die Nullstellen von P modulo 11^2,

d) die Nullstellen von P modulo 605.

(6 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:

Sei K der Zerfällungskörper des Polynoms $X^5 + 5 \in \mathbb{Q}[X]$. Seien $\alpha = \sqrt[5]{-5} \in \mathbb{R}$, $\zeta = e^{\frac{2\cdot\pi}{5}\cdot i}$. Zeigen Sie:

a) Der Körper K wird von α und ζ über $\mathbb{Q}$ erzeugt.

b) Die Erweiterung $\mathbb{Q} \subseteq K$ ist galoissch, und $[K : \mathbb{Q}] = 20$.

c) Die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ ist eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung 20.

d) Die Galoisgruppe hat einen Normalteiler der Ordnung 5.

e) Die 2-Sylow-Untergruppen der Galoisgruppe sind zyklisch mit der Ordnung 4.

(6 Punkte)