Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Zeigen Sie, dass alle Elemente der Faktorgruppe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ endliche Ordnung besitzen.

Bestimmen Sie die Elemente endlicher Ordnung in den Faktorgruppen $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ und $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$.

(6 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei $q > 1$ eine Potenz einer Primzahl p, und sei $\mathbb{F}_q$ ein Körper mit q Elementen. Sei n eine natürliche Zahl, und sei $G = GL_n(\mathbb{F}_q)$ die Gruppe der invertierbaren $(n \times n)$-Matrizen über $\mathbb{F}_q$.

a) Zeigen Sie, dass die Gruppe G von Ordnung $q^{\binom{n}{2}}(q^n - 1) \cdot (q^{n-1} - 1) \cdots (q - 1)$ ist.

b) Zeigen Sie, dass die oberen Dreiecksmatrizen mit charakteristischem Polynom $(X - 1)^n$ eine Sylowsche p-Untergruppe von $GL_n(\mathbb{F}_q)$ bilden.

(6 Punkte)

Aufgabe 3:

Sei R ein Integritätsbereich, und seien $x_1, \ldots, x_n$ und a Elemente von R. Zeigen Sie: Ist R faktoriell und d ein größter gemeinsamer Teiler von $x_1, \ldots, x_n$, so ist ad ein größter gemeinsamer Teiler von $ax_1, \ldots, ax_n$

(6 Punkte)

Aufgabe 4:

Sei $K = \mathbb{F}_5(\sqrt[4]{3})$. Zeigen Sie, dass K eine galoissche Erweiterung von $\mathbb{F}_5$ ist und bestimmen Sie ihre galoissche Gruppe. Bestimmen Sie weiter den Verband der Zwischenkörper von K über $\mathbb{F}_5$ (das heißt alle Zwischenkörper geordnet nach Inklusionen). Bestimmen Sie schließlich die Anzahl der primitiven Elemente der Erweiterung K über $\mathbb{F}_5$.

(6 Punkte)

Aufgabe 5:

Sei $L \supseteq K$ eine endliche, galoissche Körpererweiterung. Sei $L' \supseteq K$ eine beliebige weitere Körpererweiterung von K. Zeigen Sie: Gibt es genau einen Ringhomomorphismus $\phi\colon L \to L'$ mit $\phi|_K = \mathrm{id}_K$, so ist schon $K = L$.

(6 Punkte)