Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Gegeben seien eine Gruppe G und drei Untergruppen $U_1, U_2, V \subseteq G$ mit der Eigenschaft $V \subseteq U_1 \cup U_2$. Zeigen Sie, dass $V \subseteq U_1$ oder $V \subseteq U_2$ gilt. (8 Punkte)

Aufgabe 2:
Seien p, q, r Primzahlen mit $p < q < r$ und $pq < r + 1$. Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung pqr auflösbar ist. (12 Punkte)

Aufgabe 3:
Ein Ring R mit Eins heißt *idempotent*, wenn $a \cdot a = a$ für alle $a \in R$ gilt. Beweisen Sie:

a) $-1 = 1$ in R. (4 Punkte)

b) Jeder idempotente Ring ist kommutativ. (4 Punkte)

c) Jeder idempotente Integritätsbereich ist isomorph zu $\mathbb{F}_2$, dem Körper mit zwei Elementen. (4 Punkte)

Aufgabe 4:
Im Folgenden ist jeweils L/K eine Körpererweiterung und ein Element $\alpha \in L$ gegeben. Bestimmen Sie jeweils das Minimalpolynom von α über dem Grundkörper K (mit Nachweis!).

a) $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{C}$ und $\alpha := \sqrt{2} + \sqrt{3}$. (4 Punkte)

b) $K = \mathbb{F}_3$, $L = \overline{\mathbb{F}}_3$ ein algebraischer Abschluss von $\mathbb{F}_3$ und α eine Nullstelle von $X^6 + 1$. (6 Punkte)

c) $K = \mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1})$, $L = \mathbb{Q}(\zeta)$ und $\alpha = \zeta \in \mathbb{C}$ eine primitive p-te Einheitswurzel, wobei $p \geq 3$ eine Primzahl bezeichne. (6 Punkte)

Aufgabe 5:
Es sei eine Galoiserweiterung E/K mit zyklischer Galoisgruppe gegeben, so dass $[E : K] = p^n$ gilt mit einer Primzahl p und $n \geq 1$. Weiter sei $K \subset F \subset E$ ein Zwischenkörper mit $[F : K] = p^{n-1}$. Zeigen Sie: Jedes Element von $E \setminus F$ ist ein primitives Element von E über K.

(12 Punkte)