Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$, und $K^{n \times n}$ der K-Vektorraum der $n \times n$ Matrizen. Ferner sei $\mathrm{GL}_n(K)$ die Gruppe der invertierbaren Matrizen aus $K^{n \times n}$.

a) Sei $A \in K^{n \times n}$, und V der von den Matrizen $A^0, A^1, A^2, \ldots$ erzeugte Unterraum von $K^{n \times n}$. Man zeige, dass $\dim V \leq n$.

(*Hinweis:* Satz von Cayley–Hamilton)

b) Sei K ein endlicher Körper. Man zeige, dass jedes Element aus $\mathrm{GL}_n(K)$ höchstens die Ordnung $|K|^n - 1$ hat.

(*Hinweis:* Für $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ vergleiche man die von A erzeugte Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(K)$ mit V.)

(12 Punkte)

Aufgabe 2:

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ natürliche Zahlen ≥ 1. Man zeige:

a) $X^m - 1$ ist ein Teiler von $X^n - 1$ in $\mathbb{Q}[X]$ genau dann, wenn m ein Teiler von n ist.

b) $X^m + 1$ ist ein Teiler von $X^n + 1$ in $\mathbb{Q}[X]$ genau dann, wenn m ein Teiler von n und n/m ungerade ist.

c) Genau dann ist $X^n + 1$ irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$, wenn n eine Potenz von 2 ist.

(*Hinweis*: Für eine Zweierpotenz n ist $(X+1)^n + 1$ ein Eisenstein-Polynom.)

(12 Punkte)

Aufgabe 3:

Sei p eine Primzahl, die die Ordnung der endlichen Gruppe G teilt. Weiter sei P eine zyklische p-Sylowgruppe von G. Man zeige:

a) P enthält genau eine Untergruppe der Ordnung p.

b) Es gelte $|P \cap x^{-1}Px| > 1$ für alle $x \in G$. Man zeige, dass G einen Normalteiler N hat mit $|N| = p^e$ mit $e \in \mathbb{N}$.

(10 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Sei R ein Integritätsbereich und $I \subset R$ ein Primideal, so dass der Index $[R : I]$ der additiven Gruppen endlich ist. Zeigen Sie, dass I ein maximales Ideal von R ist. (11 Punkte)

Aufgabe 5:

Sei $f(X) = X^4 - 2X^2 - 2 \in \mathbb{Q}[X]$.

a) Zeigen Sie, dass

$$\alpha_1 = \sqrt{1+\sqrt{3}}, \quad \alpha_2 = \sqrt{1-\sqrt{3}}, \quad \alpha_3 = -\alpha_1, \quad \alpha_4 = -\alpha_2$$

die Nullstellen von f in $\mathbb{C}$ sind.

b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\alpha_1) \neq \mathbb{Q}(\alpha_2)$ (als Teilkörper von $\mathbb{C}$).

c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) = \mathbb{Q}(\alpha_1) \cap \mathbb{Q}(\alpha_2)$.

d) Zeigen Sie, dass die Körpererweiterungen $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \subset \mathbb{Q}(\alpha_1)$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \subset \mathbb{Q}(\alpha_2)$ galoissch sind.

e) Sei K der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{3}) \subset K$ galoissch ist und bestimmen Sie den Isomorphietyp der Galois-Gruppe.

(15 Punkte)