Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Wie viele Elemente der Ordnung 11 gibt es in einer einfachen Gruppe der Ordnung 660?

(12 Punkte)

Aufgabe 2:

(a) Sei G eine multiplikativ geschriebene endliche Gruppe der Ordnung n und sei $g \in G$. Weiter gelte $g^{n/p} \neq 1$ für jeden Primteiler p von n.
Zeigen Sie: g erzeugt G.

(b) Zeigen Sie: $4^{3^m} \equiv 1 + 3^{m+1} \mod 3^{m+2}$ für alle $m \geq 0$.

(c) Zeigen Sie, dass die Restklasse von 2 für jedes $e \geq 1$ die Einheitengruppe des Rings $\mathbb{Z}/3^e\mathbb{Z}$ erzeugt.

(12 Punkte)

Aufgabe 3:

Sei K ein endlicher Körper mit seiner multiplikativen Gruppe $(K^*, \cdot)$ und sei weiter $H := \{a^2 : a \in K^*\}$. Zeigen Sie:

(a) H ist eine Untergruppe von $(K^*, \cdot)$;

(b) $H = K^*$, falls $\mathrm{char}(K) = 2$;

(c) H hat Index 2 in K^*, falls $\mathrm{char}(K) > 2$.

(12 Punkte)

Aufgabe 4:

Sei $f = X^3 + 2X + 2 \in \mathbb{Q}[X]$ und sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f.

(a) Zeigen Sie: $1, \alpha, \alpha^2$ ist eine Basis des $\mathbb{Q}$-Vektorraums $\mathbb{Q}(\alpha)$.

(b) Schreiben Sie $(1 + \alpha)^{-1}$ als Linearkombination mit rationalen Koeffizienten bezüglich dieser Basis.

(12 Punkte)

Aufgabe 5:

Sei $K/\mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung vom Grad 55 mit nicht abelscher Galoisgruppe.
Zeigen Sie: Es gibt genau einen echten Zwischenkörper L von $K/\mathbb{Q}$, so dass $L/\mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung ist. Berechnen Sie $[L : \mathbb{Q}]$.

(12 Punkte)