Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1

(a) Sei $P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ ein normiertes Polynom. Sei $\overline{P}(X) \in \mathbb{F}_3[X]$ das Polynom, das aus $P(X)$ durch Reduktion der Koeffizienten modulo 3 entsteht.

(i) Sei $\overline{P}(X)$ irreduzibel in $\mathbb{F}_3[X]$. Zeigen Sie, dass $P(X)$ irreduzibel in $\mathbb{Z}[X]$ ist.

(ii) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass die Umkehrung der Aussage in i) falsch ist.

(b) Zeigen Sie, dass das Polynom $X^3 + (3m-1)X + (3n+1)$ für alle $m, n \in \mathbb{Z}$ irreduzibel in $\mathbb{Z}[X]$ ist.

(12 Punkte)

Aufgabe 2

Sei R der Ring $\mathbb{F}_2[X]/\langle X^3+1\rangle$.

(a) Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente in R und geben Sie diese an.

(b) Finden Sie alle Einheiten in R.

(c) Finden Sie alle idempotenten Elemente in R (also alle $f \in R$ mit $f^2 = f$).

(12 Punkte)

Aufgabe 3

(a) Zeichnen Sie alle 5-ten und alle 10-ten komplexen Einheitswurzeln in der komplexen Zahlenebene und markieren Sie jeweils die primitiven Einheitswurzeln.

(b) Sei $p \geq 3$ prim und $\zeta \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

(i) Ist ζ eine p-te Einheitswurzel, so ist $-\zeta$ eine $2p$-te Einheitswurzel.

(ii) Genau dann ist ζ eine primitive p-te Einheitswurzel, wenn $-\zeta$ eine primitive $2p$-te Einheitswurzel ist.

(iii) Es ist $\Phi_{2p}(X) = \Phi_p(-X)$. (Mit $\Phi_n \in \mathbb{Z}[X]$ bezeichnen wir das n-te Kreisteilungspolynom.)

(12 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4

Gegeben sei das Polynom $P(X) = X^5 - 4X + 2 \in \mathbb{Q}[X]$. Weiter sei $Z \subseteq \mathbb{C}$ ein Zerfällungskörper von P über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie:

(a) P ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.

(b) P hat genau drei reelle Nullstellen.

(c) Die Galois-Gruppe $\mathrm{Gal}(Z/\mathbb{Q})$ enthält ein Element der Ordnung 5 und ein Element der Ordnung 2.

(12 Punkte)

Aufgabe 5

Es sei p eine ungerade Primzahl, und es sei $a \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) Es gibt genau eine ganze Zahl $b \geq 0$ mit $a^2 + b^2 = (b+p)^2$.

(b) Es ist $a \equiv p \pmod{2p}$.

(12 Punkte)