Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Eine *Kruppe* ist ein Paar $(K, \cdot)$, bestehend aus einer Menge K und einer Abbildung $\cdot : K \times K \longrightarrow K$, die die folgenden Eigenschaften besitzt:

(K1) Es gibt ein $e \in K$ mit
$$x \cdot e = x \text{ für alle } x \in K.$$

(K2) Die Verknüpfung „ $\cdot$ " ist assoziativ.

(K3) Für jedes $x \in K$ sind die folgenden Abbildungen injektiv:
$$\begin{aligned} K &\longrightarrow K \\ y &\longmapsto x \cdot y \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} K &\longrightarrow K \\ y &\longmapsto y \cdot x \end{aligned}$$

Sei nun $(K, \cdot)$ eine Kruppe.

(a) Zeigen Sie: $e \cdot x = x$ für alle $x \in K$.

(b) Zeigen Sie: Sind $x, y \in K$ mit $y \cdot x = x$, so folgt $y = e$.

(c) Zeigen Sie: Ist K endlich, so ist $(K, \cdot)$ eine Gruppe.

(d) Ist $(\mathbb{N}_0, +)$ eine Kruppe? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Es sei $G \neq \{1_G\}$ eine endliche Gruppe, für welche die Automorphismengruppe $A = \mathrm{Aut}(G)$ transitiv auf $G \setminus \{1_G\}$ operiert. Das heißt für alle $g, h \in G \setminus \{1_G\}$ gibt es ein $\alpha \in A$ mit $\alpha(g) = h$. Zeigen Sie:

(a) Es gibt eine Primzahl p, so dass $g^p = 1_G$ für alle $g \in G$ ist.

(b) $Z(G) \neq \{1_G\}$. (Hier ist $Z(G) = \{\, g \in G \mid xg = gx \text{ für alle } x \in G \,\}$ das Zentrum von G.)

(c) Die Gruppe G ist abelsch.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3 (12 Punkte)

(a) Sei $m \geq 1$ eine ungerade ganze Zahl. Zeigen Sie, dass

$$1^m + 2^m + \ldots + (m-1)^m \equiv 0 \pmod{m}.$$

(b) Sei $m \in \mathbb{N}$ und seien $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ganze Zahlen. Zeigen Sie, dass es eine nichtleere Teilmenge $I \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ gibt, so dass

$$\sum_{i \in I} x_i \equiv 0 \pmod{m}.$$

(Hinweise: (a) Betrachten Sie geeignete Paare von Summanden.
(b) Betrachten Sie $x_1, x_1 + x_2, \ldots, x_1 + \ldots + x_m$.)

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

(a) Ist $\mathbb{Q}[X]/(X^5 - 2, X^6 + X^5 - 2X - 2)$ ein Körper?

(b) Ist $\mathbb{Z}[X]/(5, X^3 - 2X^2 + 4)$ ein Körper?

(Hinweis zur Notation: $(X^5 - 2, X^6 + X^5 - 2X - 2)$ bezeichnet in (a) das von $X^5 - 2$ und $X^6 + X^5 - 2X - 2$ erzeugte Ideal von $\mathbb{Q}[X]$, analog in (b).)

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Sei $L/\mathbb{Q}$ eine endliche Galoiserweiterung mit $L \subseteq \mathbb{C}$ und $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q}) \cong S_3 \times H$ mit $|H| = 88$, wobei S_3 die symmetrische Gruppe auf 3 Punkten bezeichnet.

(a) Zeigen Sie: Es gilt $L \cap \mathbb{Q}(\sqrt[5]{5}) = \mathbb{Q}$.

(b) Zeigen Sie: Es gibt einen Zwischenkörper K von $L/\mathbb{Q}$ mit $[K : \mathbb{Q}] = 8$, der ein Zerfällungskörper eines Polynoms in $\mathbb{Q}[X]$ vom Grad 8 ist.