Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Im Folgenden sei p eine Primzahl. Betrachten Sie den folgenden Teilring von $\mathbb{Q}$:

$$\mathbb{Z}_{(p)} := \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : a, b \in \mathbb{Z}, p \nmid b \right\} .$$

(Sie müssen nicht nachprüfen, dass dies ein Teilring von $\mathbb{Q}$ ist.)

(a) Zeigen Sie, dass die folgende Abbildung ein Ringisomorphismus ist:

$$\varphi : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{(p)}/p\mathbb{Z}_{(p)},\ a + p\mathbb{Z} \mapsto a + p\mathbb{Z}_{(p)} .$$

(b) Betrachten Sie den Fall $p = 5$. Für $x \in \mathbb{Z}_{(5)}$ schreiben wir zur Abkürzung $\bar{x} := x + 5\mathbb{Z}_{(5)}$. Bestimmen Sie die (eindeutig bestimmte) ganze Zahl $y \in \{0, \ldots, 4\}$ mit

$$\bar{y} = \frac{\overline{2}}{\overline{3}} + \frac{\overline{1}}{\overline{7}} .$$

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Es sei G eine Gruppe. Für $g, x, y \in G$ sei

$$^{(x,y)}g := xgy^{-1} . \tag{1}$$

(a) Zeigen Sie, dass (1) eine transitive Operation von $G \times G$ auf G definiert. Bestimmen Sie die Elemente des Stabilisators von 1_G in $G \times G$.

(b) Bestimmen Sie den Kern der obigen Operation von $G \times G$ auf G. Wann ist die Operation treu?
(Der Kern der Operation einer Gruppe H auf einer Menge X ist die Menge aller $h \in H$ mit $^{h}x = x$ für alle $x \in X$. Die Operation heißt treu, falls der Kern nur aus dem neutralen Element besteht.)

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Sei $\zeta = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \in \mathbb{C}$ (mit $i^2 = -1$) und seien $K = \mathbb{Q}(\zeta)$, $L = \mathbb{Q}(\zeta, \sqrt[4]{2})$. Zeigen Sie:

(a) $\zeta^4 = -1$, und K ist der Zerfällungskörper von $X^4 + 1$ über $\mathbb{Q}$.

(b) $f(X) = X^4 + 2$ ist irreduzibel über $\mathbb{Q}$.

(c) L ist der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Sei $\mathbb{F}_{11} = \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ der Körper mit elf Elementen.

(a) Zeigen Sie, dass die Restklassenringe $\mathbb{F}_{11}[X]/(X^2+1)$ und $\mathbb{F}_{11}[X]/(X^2+X+4)$ jeweils einen Körper (mit 121 Elementen) definieren.

(b) Bestimmen Sie konkret einen Isomorphismus

$$\mathbb{F}_{11}[X]/(X^2+1) \to \mathbb{F}_{11}[X]/(X^2+X+4)$$

durch Angabe des Bilds von $[X] \in \mathbb{F}_{11}[X]/(X^2+1)$.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Gruppen S_5 und $A_5 \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ nicht isomorph sind.
(Hier bezeichnet S_5 die symmetrische und A_5 die alternierende Gruppe auf 5 Elementen.)