Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:
Für $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{C}$ seien a_0, a_1, a_2 die Koeffizienten des Polynoms

$$f(X) := (X - \lambda_1) \cdot (X - \lambda_2) \cdot (X - \lambda_3) = X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0 \in \mathbb{C}[X].$$

Ferner sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & -a_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$$

die sogenannte Begleitmatrix zu den gegebenen Zahlen. Zeigen Sie:

(a) Die Eigenwerte von A sind $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

(b) Die Jordan'sche Normalform von A hat für jeden Eigenwert λ genau ein Jordan-Kästchen.

Aufgabe 2:
Zeigen Sie:

(a) Ist $n = dm$ mit ungeradem $m \in \mathbb{N}$, so gilt die Teilbarkeitsrelation $(X^d + 1) \mid (X^n + 1)$.

(b) Das Polynom $X^n + 1$ ist genau dann über $\mathbb{Q}$ irreduzibel, wenn $n = 2^k$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Aufgabe 3:
Seien p eine Primzahl und $\mathbb{F}_p \subset \mathbb{F}_{p^k}$ eine Körpererweiterung vom Grad k über dem Körper $\mathbb{F}_p$. Betrachten Sie die Gruppe $G := \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_{p^k})$ der invertierbaren 2×2-Matrizen über $\mathbb{F}_{p^k}$. Zeigen Sie:

(a) Die Teilmenge $N := \{A \in G \mid \det(A) \in \mathbb{F}_p\} \subset G$ ist ein Normalteiler.

(b) Der Index des Normalteilers N ist teilerfremd zu p.

(c) Die p-Sylowgruppen von G sind genau die p-Sylowgruppen von N.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

(a) Sei $h : A \to G$ ein surjektiver Gruppenhomomorphismus einer abelschen Gruppe A in eine Gruppe G. Zeigen Sie, dass dann auch G abelsch ist.

(b) Sei p eine Primzahl, $p \neq 2$. Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen des Polynoms $f(X) = X^2 + 2X + 1$ in $\mathbb{F}_{p^2}$ und in $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.

(c) Man zeige oder widerlege folgende Aussage: Für alle $a, b, c \in \mathbb{N}$ gilt

$$\mathrm{ggT}(a, b, c)\,\mathrm{kgV}(a, b, c) = abc.$$

Aufgabe 5:
Sei $L \subset \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper von $X^8 - 2$. Sei ferner $\zeta := \exp(\frac{2\pi i}{8}) \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\zeta)$.

(b) Die Körpererweiterung $\mathbb{Q} \subset L$ hat den Grad $[L : \mathbb{Q}] = 16$.

(c) Die Galoisgruppe $G = \mathrm{Gal}(L|\mathbb{Q})$ ist nicht abelsch und hat einen Normalteiler N der Ordnung 4 mit $N \simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.