

Thema Nr. 3
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Seien G und G' Gruppen und $f: G \rightarrow G'$ ein Gruppenhomomorphismus.

- (a) Definieren Sie den Begriff *Normalteiler*.
(b) Sei K der Kern von f und sei $H \subset G$ eine Untergruppe. Zeigen Sie, dass

$$f^{-1}(f(H)) = HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$$

ist.

- (c) Sei G eine Gruppe und seien H und K Normalteiler in G mit der Eigenschaft $H \cap K = \{e_G\}$. Zeigen Sie, dass $kh = hk$ gilt für alle $h \in H$ und $k \in K$.
(d) Geben Sie ein Beispiel (U, G) mit einer Gruppe G und einer Untergruppe U von G , die kein Normalteiler ist.

Aufgabe 2:

Berechnen Sie die letzten beiden Ziffern der Zahl

$$2018^{(2019^{2020})}$$

Gehen Sie dazu wie folgt vor:

- (a) Berechnen Sie die Klasse von $2018^{(2019^{2020})}$ in $\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$.
(b) Zeigen Sie, dass $[2018^{(2019^{2020})}] = 0$ in $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ gilt.
(c) Schließen Sie die Berechnung mithilfe des Chinesischen Restsatzes ab.

Aufgabe 3:

Sei p eine Primzahl, \mathbb{F}_p der Körper mit p Elementen und $V = \mathbb{F}_p^n$ für $n \in \mathbb{N}$. Weiter sei $G \leq \text{GL}_n(\mathbb{F}_p)$ eine Gruppe, deren Ordnung eine Potenz von p ist.

Man zeige, dass es einen Vektor $0 \neq v \in \mathbb{F}_p^n$ gibt mit $gv = v$ für alle $g \in G$.

(Hinweis: $|V \setminus \{0\}|$ ist nicht durch p teilbar.)

Aufgabe 4:

Seien K ein Körper und $L|K$ eine endliche Galoisweiterung.

- (a) Wir betrachten Zwischenkörper M und M' von $L|K$ und ein Element σ in $\text{Gal}(L|K)$. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden beiden Aussagen:
- (i) $\sigma(M) = M'$
 - (ii) $\sigma \text{Gal}(L|M)\sigma^{-1} = \text{Gal}(L|M')$
- (b) Seien L der Zerfällungskörper eines irreduziblen Polynoms f in $K[x]$ und α und β Nullstellen von f in L . Zeigen Sie, dass die Galoisgruppen $\text{Gal}(L|K(\alpha))$ und $\text{Gal}(L|K(\beta))$ zueinander isomorph sind.
- (c) Zeigen Sie, dass man in (b) die Voraussetzung, dass f irreduzibel ist, nicht weglassen kann.

Aufgabe 5:

Wir betrachten das Polynom $f_1 := x^5 + 10x + 5$ in $\mathbb{Q}[x]$ und definieren induktiv Polynome $f_n(x) := f_1(f_{n-1}(x))$ für n in \mathbb{N} mit $n \geq 2$. Zeigen Sie, dass die Polynome f_n für alle n in \mathbb{N} irreduzibel sind. Zeigen Sie dazu folgende Zwischenschritte durch Induktion nach n :

- (a) f_n liegt in $\mathbb{Z}[x]$ und die Klasse von f_n in $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}[x]$ ist durch x^{5^n} gegeben.
- (b) Zeigen Sie, dass die Klasse von $f_n(0)$ in $\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$ nicht verschwindet.