Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1

Seien $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$ die Gaußschen Zahlen und

$$N(a + bi) = a^2 + b^2$$

die übliche Norm. Für $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[i]$ ist α ein Teiler von β (Notation: $\alpha|\beta$), falls $\beta = \gamma \cdot \alpha$ für ein $\gamma \in \mathbb{Z}[i]$ gilt. Zeigen Sie:

(a) $4 + 5i$ ist ein Teiler von $14 - 3i$.

(b) $3 + 7i$ ist kein Teiler von $10 + 3i$.

(c) Für $\alpha = a + bi \in \mathbb{Z}[i]$ gilt: $N(\alpha)$ ist gerade $\Leftrightarrow 1 + i$ teilt α.

Aufgabe 2

Sei V ein K-Vektorraum und $f : V \to V$ eine K-lineare Abbildung. Es seien $m \geq 1$ und $a_0, \ldots, a_{m-1} \in K$ gegeben mit

$$f^m + a_{m-1}f^{m-1} + \cdots + a_1 f + a_0 = 0,$$

wobei m minimal gewählt ist (d.h. es gibt keine solche Relation mit kleinerem m). Zeigen Sie:

(a) Ist $a_0 = 0$, so ist f nicht invertierbar.

(b) Ist $a_0 \neq 0$, so ist f invertierbar.

Aufgabe 3

Sei $K \subset L$ eine algebraische Körpererweiterung. Es sei $\alpha \in L$ mit $K(\alpha) = L$. Zu jedem Zwischenkörper E ist P_E das Minimalpolynom von α über E.

(a) Zeigen Sie, dass $[L : E] = \deg(P_E)$ für jeden Zwischenkörper E gilt.

(b) Seien E und F zwei Zwischenkörper mit $F \subset E$. Zeigen Sie, dass P_E ein Teiler von P_F in $E[X]$ ist.

(c) Sei E ein Zwischenkörper. Sei F der Zwischenkörper erzeugt von den Koeffizienten von P_E. Zeigen Sie, dass $P_E = P_F$ gilt. Folgern Sie daraus, dass $E = F$ ist.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4

Gegeben sei die Gruppe der invertierbaren 3×3-Matrizen über dem Körper mit 2 Elementen

$$G = \mathrm{GL}_3(\mathbb{F}_2)\,.$$

(a) Verifizieren Sie, dass G die Ordnung 168 hat.

(b) Bestimmen Sie eine 2-Sylow-Gruppe von G.
Hinweis: Betrachten Sie Dreiecksmatrizen in G.

(c) Wie viele 2-Sylow-Gruppen hat G?
Hinweis: Betrachten Sie den Stabilisator einer 2-Sylow-Gruppe.

Aufgabe 5

Sei K ein Körper der Charakteristik 0 und $K(\alpha,\beta)/K$ eine endliche Galoiserweiterung. Seien weiter $K(\alpha)/K$ und $K(\beta)/K$ Galoiserweiterungen, sowie $K(\alpha) \cap K(\beta) = K$.
Setze $G = \mathrm{Gal}(K(\alpha,\beta)/K(\alpha+\beta))$. Zeigen Sie:

(a) Für $\sigma \in G$ gilt: $\sigma(\alpha) - \alpha = \beta - \sigma(\beta) \in K$.

(b) Es ist $K(\alpha+\beta) = K(\alpha,\beta)$.

Hinweis zu b): Berechnen Sie zunächst $\sigma^j(\alpha)$ unter Verwendung von (a).