Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Sei $A \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{Q})$ eine 2×2-Matrix mit rationalen Einträgen, sodass A^n die Einheitsmatrix I_2 ist für ein $n \geq 1$. Sei $m_A \in \mathbb{Q}[X]$ das Minimalpolynom von A. Zeigen Sie:

(a) Der Grad von m_A ist höchstens 2.

(b) Das Polynom m_A ist ein Teiler von $X^n - 1$ in $\mathbb{Q}[X]$.

(c) Wählt man $n \geq 1$ minimal mit $A^n = I_2$, dann ist $n \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$.
Hinweis: Betrachten Sie geeignete Kreisteilungspolynome.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die letzten drei Ziffern von 7^{404404}.

(b) Es sei φ die Eulersche φ-Funktion. Zeigen Sie, dass $\varphi(n^2) = n\,\varphi(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

(c) Es sei p eine Primzahl mit $p \notin \{2, 5\}$. Zeigen Sie, dass p eine der Zahlen $9, 99, 999, 9999, \ldots$ teilt.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Man betrachte die symmetrische Gruppe S_4 des Grades 4 und

$$V := \{(1), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\} \subseteq S_4 .$$

(a) Zeigen Sie, dass V ein zu $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ isomorpher Normalteiler in S_4 ist.

(b) Zeigen Sie, dass S_4/V zur symmetrischen Gruppe S_3 isomorph ist.

(c) Beweisen Sie, dass S_4 keinen Normalteiler der Ordnung 8 hat.

(d) Bestimmen Sie alle Untergruppen und alle Normalteiler der Faktorgruppe S_4/V.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4 (12 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle Ideale des Rings $\mathbb{Z}/2022\mathbb{Z}$. Bestimmen Sie darunter alle Primideale in $\mathbb{Z}/2022\mathbb{Z}$.

(b) Bestimmen Sie alle idempotenten Elemente des Rings $R := \mathbb{Z}/2022\mathbb{Z}$, d.h. alle Elemente $a \in R$ mit $a^2 = a$.

(c) Bestimmen Sie die Anzahl der Nullteiler im Ring $\mathbb{Z}/2022\mathbb{Z}$.

(d) Bestimmen Sie ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n < 2022$ und $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \cong (\mathbb{Z}/2022\mathbb{Z})^\times$.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Für $n \in \mathbb{N}_+$ sei $a_n := \sqrt[2^n]{2}$. Weiter seien $A := \{a_n \mid n \in \mathbb{N}_+\}$ und $K := \mathbb{Q}(A)$. Zeigen Sie:

(a) $[\mathbb{Q}(a_n) : \mathbb{Q}] = 2^n$ für jedes $n \in \mathbb{N}_+$

(b) $[K : \mathbb{Q}] = \infty$

(c) $K = \bigcup_{n\in\mathbb{N}_+} \mathbb{Q}(a_n)$

(d) K ist eine algebraische Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$.