Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Hinweis zur Punktbewertung: Es sind insgesamt 30 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (9 Punkte)

Sei L/K eine galoissche Körpererweiterung mit einer zur alternierenden Gruppe A_4 isomorphen Galoisgruppe.

a) Bestimmen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Zahl z_n der Zwischenkörper Z von L/K mit $[Z : K] = n$.

b) Wie viele Zwischenkörper Z von L/K gibt es, für die Z/K eine Galoiserweiterung ist?

Begründen Sie Ihre Aussagen.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Sei G eine freie abelsche Gruppe mit der Basis $(X_1, ..., X_n)$.

a) Zeigen Sie, dass jede Basis von G aus genau n Elementen besteht.

b) Seien $Y_i = \sum_{k=1}^{n} z_{ik} X_k$ $(z_{ik} \in \mathbb{Z},\ i, k = 1, ..., n)$ Elemente aus G und $A = [z_{ik}]_{i,k=1,...,n}$ die zugehörige Koeffizientenmatrix. Ferner sei H die von $Y_1, ..., Y_n$ erzeugte Untergruppe von G. Zeigen Sie: Ist $\det A \neq 0$, so besitzt G/H die Ordnung $|\det A|$.

Aufgabe 3 (7 Punkte)

Im Polynomring $K[X, Y]$ in den Unbestimmten X, Y über einem Körper K sei I das von $X^4, Y^4, X^3 Y, XY^3$ erzeugte Ideal und $R := K[X, Y]/I$. Ferner seien $\zeta := X + I$, $\eta := Y + I$ die Restklassen von X bzw. Y in R.

a) Welche Dimension besitzt R als K-Vektorraum? Begründen Sie Ihre Aussage.

b) Welche Dimension besitzt der Sockel $S := \{f \in R \mid \zeta f = \eta f = 0\}$ von R als K-Vektorraum? Begründen Sie Ihre Aussage.

c) Bestimmen Sie alle Primideale von R.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Sei L/K eine Körpererweiterung. Eine K-lineare Abbildung $d : L \to L$ heißt Derivation von L/K, wenn für alle $a, b \in$ L die Produktregel $d(ab) = ad(b) + bd(a)$ erfüllt ist. Zeigen Sie, dass für ein solches d die folgenden Aussagen richtig sind:

a) $d(a) = 0$ für alle $a \in K$.

b) Ist $f \in K[X]$ ein Polynom und $a \in L$, so gilt $d(f(a)) = f'(a)da$ mit der Ableitung f' von f.

c) $Z := \ker d := \{a \in L \mid d(a) = 0\}$ ist ein Zwischenkörper von L/K.

d) Ist $a \in L$ separabel algebraisch über Z, so ist $a \in Z$.

e) Ist L ein endlicher Körper und K sein Primkörper, so ist d die Nullabbildung.