Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Hinweis zur Punktbewertung: Es sind insgesamt 31 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (7 Punkte)

Für $3 \leq n$ sei D_n die Diedergruppe der Ordnung $2n$, es sei H die Quaternionengruppe der Ordnung 8, und S_3 sei die symmetrische Gruppe auf 3 Elementen.

a) Zeigen Sie: Die drei Gruppen D_8, $D_4 \times \mathbb{Z}_2$ und $H \times \mathbb{Z}_2$ sind paarweise nicht isomorph.

b) Bestimmen Sie für jede der drei Gruppen aus a) die Anzahl der zyklischen Untergruppen der Ordnung 4 und geben Sie jeweils die Menge dieser Untergruppen an.

c) Zeigen Sie: Die Gruppen D_6 und $S_3 \times \mathbb{Z}_2$ sind isomorph.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Betrachtet sei folgendes System von zwei Kongruenzen in $\mathbb{Q}[X]$:

$$\begin{aligned} f &\equiv X-1 \mod X^2-1 \\ f &\equiv X+1 \mod X^2+X+1 \ . \end{aligned}$$

Bestimmen Sie eine konkrete Lösung und die Menge aller Lösungen des Systems.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Sei R ein (nicht notwendigerweise kommutativer) Ring mit 1.

a) Sei $a \in R$. Man beschreibe - mit Beweis - das Hauptideal (a), d.h. das kleinste beidseitige Ideal von R, das a enthält.

b) Sei nun $\mathcal{I} \subsetneq R$ ein beidseitiges Ideal. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

aa) Für alle beidseitigen Ideale $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ aus R gilt: $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} \subseteq \mathcal{I} \Longrightarrow \mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$ oder $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{I}$.

bb) Für alle $a, b \in R$ gilt: $aRb \subseteq \mathcal{I} \Longrightarrow a \in \mathcal{I}$ oder $b \in \mathcal{I}$.

cc) Für alle Linksideale $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ aus R gilt: $\mathcal{A} \cdot \mathcal{B} \subseteq \mathcal{I} \Longrightarrow \mathcal{A} \subseteq \mathcal{I}$ oder $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{I}$.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4 (6 Punkte)

a) Sei p eine Primzahl. Man gebe - mit entsprechendem Beweis - eine komplexe Zahl z an, so dass $\mathbb{Q}(z)$ eine Galoiserweiterung über $\mathbb{Q}$ vom Grade $p-1$ ist.

b) Man gebe - mit entsprechendem Beweis - eine komplexe Zahl z an, so dass $\mathbb{Q}(z)$ eine Galoiserweiterung vom Grade 500 über $\mathbb{Q}$ ist.

Aufgabe 5 (7 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle irreduziblen Polynome 2. und 3. Grades über $\mathbb{F}_2$.

b) Zeigen Sie: $f = X^6 + X + 1$ ist irreduzibel in $\mathbb{F}_2[X]$.

c) Sei $K = \mathbb{F}_2(\alpha)$, wo α eine Nullstelle des f aus b) ist. Geben Sie alle Körper L mit $\mathbb{F}_2 \subsetneq L \subsetneq K$ an, indem Sie explizit ein z $\in K$ mit $L = \mathbb{F}_2(z)$ bestimmen.