Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Hinweis zur Punktbewertung: Es sind insgesamt 30 Punkte erreichbar.

Aufgabe 1 (6 Punkte)

a) Zeigen Sie: Es gibt keine ganzen Zahlen x und y mit $x^2 + 3y^2 = 2001$.

b) Bestimmen Sie die Isomorphieklassen der Gruppen der Ordnung 2001.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

a) G sei eine endliche abelsche Gruppe, p das Produkt aller Elemente von G.
Zeigen Sie:

$$p = \begin{cases} 1 & \text{falls G kein oder mehr als ein Element der Ordnung 2 hat} \\ a & \text{sonst, wobei a dann das einzige Element der Ordnung 2 von G ist.} \end{cases}$$

b) Zeigen Sie für alle natürlichen Zahlen $n \neq 4$: n teilt die Zahl $((n-1)!)^2 + (n-1)!$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Auf der Menge $\mathbb{D}$ aller Polynome in x mit rationalen Koeffizienten seien die Operation "Addition" $\oplus$ und "Multiplikation" $\odot$ wie folgt definiert:

$$f(x) \oplus g(x) = f(x) + g(x),$$

$$f(x) \odot g(x) = \int_0^x f'(t)g'(t)\,dt + f(0)g(0).$$

a) Zeigen Sie: Auch mit diesen Operationen ist $\mathbb{D}$ ein assoziativer Ring mit Einselelement.

b) Bestimmen Sie die idempotenten Elemente von $\mathbb{D}$, d.h. die Elemente mit $f \odot f = f$.

c) Geben Sie $\mathbb{D}$ als direkte Summe von Teilringen an und beschreiben Sie einen der beiden Summanden.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Sei $\alpha = \sqrt{2+\sqrt[3]{2}} \in \mathbb{R}$ die positive Quadratwurzel von $2+\sqrt[3]{2} \in \mathbb{R}$.

a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom f(x) von α über $\mathbb{Q}$ und den Grad $|\mathbb{Q}(\alpha):\mathbb{Q}|$.

b) Geben Sie alle Nullstellen von f(x) in $\mathbb{C}$ an. Ist $\mathbb{Q}(\alpha)$ ein Zerfällungskörper von f(x)?

Aufgabe 5 (6 Punkte)

a) Zeigen Sie: Es gibt kein Polynom $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ so dass $P(7) = 5$, $P(9) = 4$ gilt.

b) Zeigen Sie für $a, b \geq 3$, $a, b \in \mathbb{Z}$:

$x(x-3)(x-a)(x-b)+1$ ist irreduzibel in $\mathbb{Z}[x]$.