Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Vorbemerkung: *Es sind insgesamt 30 Punkte erreichbar. Begründen Sie alle Schlussweisen und Rechenschritte durch einen kurzen Text.*

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Es sei p eine Primzahl und G eine Gruppe der Ordnung $p^n, n \geq 2$. $C(g)$ sei der Zentralisator eines Elements $g \in G$. Zeigen Sie:

$$|C(g)| > p.$$

Aufgabe 2 (7 Punkte)

Seien p eine Primzahl, $1 \leq r \in \mathbb{N}$ und $b = p^r$. Seien weiter A der Faktoring $A = \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$ und A^* die Gruppe der Einheiten von A. Die Gruppe A^* operiert auf A mittels der Multiplikation $A^* \times A \to A,\ (a,x) \mapsto a \cdot x$.

Bestimmen Sie die Bahnen dieser Operation, die Anzahl dieser Bahnen und ihre jeweilige Ordnung.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

a) Zerlegen Sie das Polynom $f := X^6 + 4X^4 + 4X^2 + 3 \in \mathbb{Q}[X]$ in irreduzible Faktoren.

b) Bestimmen Sie den Zerfällungskörper Z von f über $\mathbb{Q}$ und $[Z:\mathbb{Q}]$.

Aufgabe 4 (7 Punkte)

K sei ein Körper, $K[T]$ der Polynomring in einer Variablen T und $K[X,Y]$ der Polynomring in den Variablen X, Y über K. Für zwei fest gewählte f, $g \in K[T]$ sei

$$\mathrm{I} := \{\mathrm{F} \in K[X,Y] \mid \mathrm{F}(f,g) = 0\}.$$

a) Zeigen Sie, dass I ein Primideal von $K[X,Y]$ ist.

b) Unter welcher Bedingung für f und g ist I ein maximales Ideal von $K[X,Y]$? Begründen Sie Ihre Antwort!

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5 (7 Punkte)

Zu $f \in \mathbb{Q}[x]$ sei G_f die Galoisgruppe von f über $\mathbb{Q}$. Geben Sie – mit Begründung – jeweils ein Beispiel für ein f mit folgender Eigenschaft an:

a) $G_f \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$

b) $G_f \cong S_5$ (symmetrische Gruppe auf fünf Elementen)