Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Vorbemerkung: *Es sind insgesamt 30 Punkte erreichbar. Begründen Sie alle Schlussweisen und Rechenschritte durch einen kurzen Text.*

Aufgabe 1 (7 Punkte)

Geben Sie eine natürliche Zahl n an, so dass $n!$ im Dezimalsystem mit genau 2002 Nullen endet!

Aufgabe 2 (8 Punkte)

a) Zeigen Sie: Gruppen der Ordnung 2002 haben einen Normalteiler vom Index 2.
b) Zeigen Sie: Eine Gruppe der Ordnung 1001 ist zyklisch.
c) Zeigen Sie: Es gibt genau 8 Isomorphietypen von Gruppen der Ordnung 2002.

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Zeigen Sie:

a) Ist $\zeta = e^{\pi i/1001}$ eine primitive 2002-te Einheitswurzel in $\mathbb{C}$, so ist $\varepsilon = 1 + \zeta + \zeta^2$ eine Einheit in $\mathbb{Z}[\zeta]$.

Anleitung: Stellen Sie $\frac{1}{\varepsilon} = \frac{\zeta - 1}{\zeta^3 - 1}$ als Summe von Potenzen von ζ dar!

b) Es gibt keinen Integritätsring der Charakteristik Null, der genau 2002 Einheiten besitzt.
c) Ist R ein Integritätsring mit genau 2002 Einheiten, so hat R die Charakteristik 2003 (ist Primzahl!).
d) Geben Sie zwei nichtisomorphe Integritätsringe mit genau 2002 Einheiten an!

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Für eine rationale Zahl $q \in \mathbb{Q}$ sei G_q die Galoisgruppe des Polynoms

$$f_q(x) = x^5 - 2002x + q$$

über dem Körper $\mathbb{Q}$ der rationalen Zahlen. Zeigen Sie:

a) Für unendlich viele $q \in \mathbb{Q}$ ist $|G_q| = 120$.

b) Für unendlich viele $q \in \mathbb{Q}$ ist $|G_q|$ ein Teiler von 24.