## Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

**Vorbemerkung:** *Es sind insgesamt 30 Punkte erreichbar. Begründen Sie alle Schlussweisen und Rechenschritte durch einen kurzen Text.*

### Aufgabe 1 (6 Punkte)

Es sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl $\geq 5$ derart, dass auch $q := p + 2$ eine Primzahl ist, wie z.B. $p = 17$ und $q = 19$.

a) Es sei $G$ eine Gruppe der Ordnung $p^2 \cdot q^2$. Bestimmen Sie die Anzahlen und Ordnungen der Sylow-Untergruppen von $G$.

b) Bestimmen Sie alle Isomorphietypen von Gruppen der Ordnung $104329 = 323^2$.

### Aufgabe 2 (5 Punkte)

Bestimmen Sie

a) alle Lösungen der Gleichung $X^4 = 81$ im Körper $\mathbb{F}_{167}$;

b) alle natürlichen Zahlen $n$ mit $1 \leq n \leq 2003$ und

$$n^4 \equiv 81 \bmod 2004 \qquad \text{[es ist } 2004 = 167 \cdot 12]$$

### Aufgabe 3 (6 Punkte)

Welche der folgenden drei Ideale in $\mathbb{C}[X, Y]$

$$I_1 = (X \cdot Y) \quad , \quad I_2 = (X + Y) \quad , \quad I_3 = (X, Y)$$

sind Primideale bzw. sogar maximale Ideale?

### Aufgabe 4 (7 Punkte)

Das Polynom

$$f(X) = X^6 + 3X^3 + 3$$

habe die Nullstelle $a \in \mathbb{C}$.

a) Zeigen Sie, dass $f$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist.

b) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(a)$ die dritte Einheitswurzel

$$\omega = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{-3}$$

enthält.

c) Zeigen Sie, dass $\mathbb{Q}(a)$ nicht normal über $\mathbb{Q}$ ist.

d) Bestimmen Sie den Grad des Zerfällungskörpers von $f$ über $\mathbb{Q}$.

Fortsetzung nächste Seite!

**Aufgabe 5** (6 Punkte)

Über dem Körper $\mathbb{F}_2$ mit zwei Elementen seien die Polynome

$$p(X) = X^3 + X + 1 \quad \text{und} \quad q(X) = X^3 + X^2 + 1$$

gegeben. Zeigen Sie:

a) $p$ und $q$ sind die einzigen irreduziblen Polynome in $\mathbb{F}_2[X]$ vom Grad 3.

b) Ist $Z$ der Zerfällungskörper von $p$ über $\mathbb{F}_2$ und $a \in Z$ eine Nullstelle von $p$, so sind $a^2$ und $a^4$ die beiden anderen Nullstellen von $p$.

c) $Z$ besteht genau aus den Elementen $0, 1$, den drei Nullstellen $a, a^2, a^4$ von $p$ und den drei Nullstellen $a^3, a^5, a^6$ von $q$ in $Z$.