Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Vorbemerkung: *Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt 30 Punkte. Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.*

Aufgabe 1:

Bestimmen Sie je eine 2-Sylowgruppe in

a) der symmetrischen Gruppe S_4,

b) der alternierenden Gruppe A_5,

c) der alternierenden Gruppe A_6.

Aufgabe 2:

Bestimmen Sie alle natürlichen Zahlen n im Intervall $0 \leq n \leq 999$ mit

$$n^2 \equiv 500 \bmod 1000 \quad .$$

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie im Polynomring $\mathbb{Q}[X]$ den größten gemeinsamen Teiler der beiden Polynome

$$f(X) = X^5 - X^3 - X^2 + 1 \qquad \text{und} \qquad g(X) = X^4 - 2X^3 + 2X - 1 \quad .$$

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie die Ordnung der Galoisgruppe des Polynoms

$$X^4 - 4X^3 + 4X^2 - 2$$

über $\mathbb{Q}$. [Hinweis: Beseitigen Sie durch geeignete Substitution den Term dritter Ordnung.]

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:

Sei $K = \mathbb{F}_{3^3}$ der Körper mit 27 Elementen.

a) Was ist die Ordnung der Galoisgruppe $G = \mathrm{Gal}(K|\mathbb{F}_3)$? In wie viele und wie lange Bahnen zerfällt K unter der Operation von G?

b) Wieviele normierte Polynome vom Grad 3 in $\mathbb{F}_3[X]$ sind irreduzibel?

c) Zeigen Sie: Das Polynom X^3+aX^2+bX+c ist genau dann irreduzibel, wenn das Polynom $X^3 - aX^2 + bX - c$ irreduzibel ist.

d) Zerlegen Sie das Polynom

$$p(X) = X^{26} - 1 \quad \in \mathbb{F}_3[X]$$

in irreduzible Faktoren im Ring $\mathbb{F}_3[X]$.