Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Vorbemerkung: *Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt 30 Punkte. Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.*

Aufgabe 1:

Seien p, q Primzahlen mit $p < q$. Zeigen Sie:

a) Im Fall $p \nmid (q-1)$ ist jede Gruppe der Ordnung pq abelsch.

b) Jede abelsche Gruppe der Ordnung pq ist zyklisch.

c) Im Fall $p \mid (q-1)$ gibt es eine nichtabelsche Gruppe der Ordnung pq.

Aufgabe 2:

Gegeben ist der Ring $R = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{-3}$. Zeigen Sie:

a) ± 1 sind die einzigen Einheiten in R.

b) 2 ist ein irreduzibles Element in R aber kein Primelement.

c) R ist kein faktorieller Ring.

Aufgabe 3:

Zeigen Sie, dass die folgenden Polynome irreduzibel sind:

a) $5X^3 + 63X^2 + 168$ in $\mathbb{Z}[X]$.

b) $X^4 + X + 1$ in $\mathbb{F}_2[X]$.

c) $X^9 + XY^7 + Y$ in $\mathbb{Z}[X, Y]$.

Aufgabe 4:

Seien p, q verschiedene Primzahlen.

a) Zeigen Sie, dass die Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{p})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{q})$ nicht isomorph sind.

b) Zeigen Sie, dass der Körper $\mathbb{Q}(\sqrt{p}, \sqrt{q})$ vom Grad 4 über $\mathbb{Q}$ ist.

c) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von $\alpha = \sqrt{p} + \sqrt{q}$ über $\mathbb{Q}$.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:

Sei p eine Primzahl und ζ_p eine primitive p-te Einheitswurzel. Zeigen Sie:

a) Zu jedem natürlichen Teiler von $p-1$ gibt es genau einen Teilkörper K_n von $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ mit

$$[K_n : \mathbb{Q}] = n \quad .$$

b) Der einzige über $\mathbb{Q}$ quadratische Teilkörper von $\mathbb{Q}(\zeta_5)$ ist $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.