Thema Nr. 1

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten.

Vorbemerkung: *Bei den folgenden Aufgaben sind alle Schlussfolgerungen und nichttrivialen Rechnungen mit einem erklärenden Text zu begründen.*

Aufgabe 1 (6 Punkte):

Beweisen Sie oder widerlegen Sie:

a) $\sqrt{35}$ ist irrational.

b) Es gibt unendlich viele Primzahlen.

c) Für unendlich viele ganze Zahlen n sind die beiden Zahlen $77n+1$ und $143n+2$ nicht teilerfremd.

Aufgabe 2 (8 Punkte):

Sei $n \geq 2$ eine natürliche Zahl und sei S_n die Gruppe der Permutationen von $\{1,2,\ldots,n\}$. Es bezeichne α den n-Zyklus $(1,2,\ldots,n)$ und H die von α erzeugte Untergruppe in S_n, ferner sei

$$G = \{\sigma \in S_n\,;\ \sigma(n) = n\} \quad .$$

Zeigen Sie:

a) Die Multiplikationsabbildung

$$H \times G \to S_n \quad , \quad (\alpha^\ell, \sigma) \mapsto \alpha^\ell \sigma$$

ist bijektiv.

b) Für $n \geq 4$ ist H kein Normalteiler von S_n.

c) Zu jedem $\sigma \in G$ und jedem ℓ mit $1 \leq \ell \leq n$ existiert ein $\rho \in G$ mit $\sigma\alpha^\ell = \alpha^{\sigma(\ell)}\rho$.

Aufgabe 3 (8 Punkte):

Sei p eine Primzahl, sei $\zeta = \exp\frac{2\pi i}{p}$ und sei R der kleinste Unterring von $\mathbb{C}$, der $\mathbb{Z}$ und ζ enthält. Zeigen Sie:

a) $1, \zeta, \zeta^2, \ldots, \zeta^{p-2}$ ist eine $\mathbb{Z}$-Basis von R.

b) Sei $a \in \mathbb{Z}$. Dann gibt es einen Ringisomorphismus

$$\mathbb{Z}\Big/\Big(\sum_{\ell=0}^{p-1} a^\ell\Big) \xrightarrow{\ \simeq\ } R/(a-\zeta) \quad .$$

c) $2-\zeta$ ist genau dann Primelement in R, wenn $2^p - 1$ Primzahl ist.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4 (8 Punkte):

Sei $L \subseteq \mathbb{C}$ der Zerfällungskörper des Polynoms $X^7 + 1 - i$ über $\mathbb{Q}(i)$, wobei $i^2 = -1$ sei. Für natürliche Zahlen n sei $\zeta_n = \exp \frac{2\pi i}{n}$. Zeigen Sie:

a) $\mathbb{Q}(\zeta_7, i) = \mathbb{Q}(\zeta_{28})$ und $[\mathbb{Q}(\zeta_7, i) : \mathbb{Q}(i)] = 6$.

b) $[L : \mathbb{Q}(i)] = 42$.

c) L ist abgeschlossen unter der komplexen Konjugation.

d) L ist Galoiserweiterung von $\mathbb{Q}$.