## Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

**Vorbemerkung:**
Begründen Sie alle Antworten und versehen Sie Rechnungen mit einem kurzen Text.

**Aufgabe 1:**

Sei $G$ eine endliche Gruppe und $1 \leq e \in \mathbb{N}$ die kleinste Zahl, so dass $g^e = 1$ ist für alle $g \in G$. Zeigen Sie, dass $e$ ein Teiler der Ordnung $|G|$ von $G$ ist und dass jede Primzahl $p$, welche $|G|$ teilt, auch $e$ teilt. Geben Sie eine Gruppe $G$ an, für die $e < |G|$ gilt. (6 Punkte)

**Aufgabe 2:**

Sei $G$ eine endliche Gruppe und $g \in G$ ein Element der Ordnung $|\langle g \rangle| = p^r$, $p$ eine Primzahl, $r \geq 1$.
Zeigen Sie, dass die Anzahl der Elemente der Ordnung $p^r$ in $G$ ein Vielfaches von $p^{r-1}(p-1)$ ist. Geben Sie eine Gruppe mit $|G| = 12$ an, die 6 Elemente der Ordnung 4 enthält. (6 Punkte)

**Aufgabe 3:**

Sei $K$ ein Körper und $K[X,Y]$ der Polynomring über $K$ in den zwei Variablen $X, Y$. Sei $I$ das von $X^3, Y^3, X^2Y^2$ erzeugte Ideal. Bestimmen Sie $\dim_K(K[X,Y]/I)$.
Es bezeichne $S$ den Ring $K[X,Y]/I$. Zeigen Sie, dass $S$ genau ein echtes Primideal $J$ enthält. Bestimmen Sie $\dim_K(S/J)$. (6 Punkte)

**Aufgabe 4:**

Sei $\mathbb{F}_q$ ein endlicher Körper mit $q$ Elementen. Sei $p$ irgendeine Primzahl. Bestimmen Sie die Anzahl der irreduziblen Polynome vom Grade $p^2$ über $\mathbb{F}_q$. (6 Punkte)

**Aufgabe 5:**

Sei $L\,|\,K$ eine galoissche Erweiterung mit Galoisgruppe $G$. Sei $|G| = 85$. Zeigen Sie, dass $L$ Teilkörper vom Grade 5 und vom Grade 17 über $K$ enthält, die normal über $K$ sind. (6 Punkte)