Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Sei S_n die Gruppe der Permutationen von $n \geq 1$ Elementen. Für welche $1 \leq j \in \mathbb{N}$ gibt es Elemente der Ordnung j in S_n und $n \in \{3,4,5,6,7\}$?

(6 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei G die abelsche Gruppe $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/35\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/49\mathbb{Z}$. Der Gruppenhomomorphismus $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow G$ sei für $n \in \mathbb{Z}$ durch $\varphi(n) = (n \bmod 9, n \bmod 35, n \bmod 49)$ gegeben.

Geben Sie eine zyklische Gruppe H an und einen Gruppenhomomorphismus $\psi : G \longrightarrow H$, so dass ψ einen Isomorphismus $G/\mathrm{im}(\varphi) \xrightarrow{\sim} H$ induziert (hier: $\mathrm{im}(\varphi) =$ Bild von φ).

(6 Punkte)

Aufgabe 3:

Sei $L/\mathbb{Q}$ eine galoissche Erweiterung vom Grad 3. Sei $\alpha \in L$ und $L = \mathbb{Q}(\alpha)$. Zeigen Sie:

a) Es ist α Nullstelle eines Polynoms $f_\alpha(X) = X^3 + aX^2 + bx + c \in \mathbb{Q}[X]$, für das $b \neq a^2/3$ gilt.

b) Ist $\beta \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von $f_\alpha(X)$, so gilt $\beta \in \mathbb{R}$.

(6 Punkte)

Aufgabe 4:

Sei $f(X) = X^5 - X - \frac{1}{16} \in \mathbb{Q}[X]$. Zeigen Sie:

a) $f(X)$ ist irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.

b) $f(X)$ hat genau drei reelle Nullstellen.

c) Die Galoisgruppe eines Zerfällungskörpers von $f(X)$ über $\mathbb{Q}$ besitzt eine Einbettung in die Gruppe S_5 der Permutationen von 5 Elementen und enthält dann eine Transposition.

(6 Punkte)