Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

R sei ein endlicher kommutativer Ring. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) $r \in R$ ist genau dann eine Einheit, wenn es eine positive ganze Zahl n gibt mit $r^n = 1$.

b) $r \in R$ ist genau dann ein Nullteiler, wenn es eine positive ganze Zahl n gibt mit $r^n = 0$.

(4 Punkte)

Aufgabe 2:

G sei eine Gruppe, $n \in \mathbb{N}$, und P_n bezeichne die von der Menge $\{g^n; g \in G\}$ erzeugte Untergruppe in G. Zeigen Sie:

a) P_n ist ein Normalteiler in G.

b) Für jeden Normalteiler N in G gilt: Es ist $P_n \subseteq N$ genau dann, wenn $y^n = 1$ für alle Nebenklassen $y \in G/N$ ist.

c) Die Kommutatorgruppe G' von G ist Untergruppe von P_2.

(6 Punkte)

Aufgabe 3:

G bezeichne eine Gruppe der Ordnung p^2q, wobei p und q Primzahlen mit $p < q$ sind. Zeigen Sie:

a) Ist G einfach, so folgt mit dem Satz von Sylow: $q = p + 1$.

b) G ist nicht einfach.

c) Frage: Ist G auch dann nicht einfach, wenn $p = q$ ist?

(8 Punkte)

Aufgabe 4:

p sei eine Primzahl, $\alpha := \sqrt[p]{2} \in \mathbb{R}$ und $\zeta := e^{2\pi i/p} \in \mathbb{C}$.

a) Zeigen Sie, dass der Grad von α über $\mathbb{Q}$ gleich p ist, und geben Sie das Minimalpolynom P von α über $\mathbb{Q}$ an.

b) Zeigen Sie, dass $L := \mathbb{Q}[\alpha, \zeta]$ der Zerfällungskörper von P ist. Geben Sie den Grad von ζ über $\mathbb{Q}$ an und beweisen Sie:
$$[L : \mathbb{Q}] = p(p-1).$$

c) Zeigen Sie, dass die Galoisgruppe der Erweiterung $L \mid \mathbb{Q}$ isomorph ist zur Gruppe der bijektiven Abbildungen
$$\tau_{a,b} : \mathbb{F}_p \longrightarrow \mathbb{F}_p, \quad \tau_{a,b}(x) := ax + b \qquad (a \in \mathbb{F}_p^*, b \in \mathbb{F}_p)$$
des Körpers $\mathbb{F}_p$.

(8 Punkte)