Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Es sei n eine natürliche Zahl mit $n \geq 2$. Zeigen Sie: $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ ist Teiler von $n!$ genau dann, wenn $n + 1$ keine Primzahl ist. (8 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei $n \geq 1$ und $M_n(K)$ der K–Vektorraum der $n \times n$–Matrizen über einem Körper K und $V \subseteq M_n(K)$ ein Untervektorraum mit $\dim V > n$. Zeigen Sie: Es gibt eine Matrix $0 \neq A \in V$ mit $\det A = 0$. (6 Punkte)

Aufgabe 3:

G sei eine endliche Gruppe, und p bezeichne den kleinsten Primteiler der Gruppenordnung von G. Zeigen Sie: Jede Untergruppe U von G mit Index p ist normal. (8 Punkte)

Aufgabe 4:

Zeigen Sie: Es gibt kein Polynom $P \in \mathbb{Z}[X]$ derart, dass $P^3 - P + 2$ durch $X^4 - 7$ teilbar ist. (8 Punkte)