Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Bei den folgenden Aufgaben sind alle Schlussfolgerungen und nichttrivialen Rechnungen mit einem erklärenden Text zu begründen.

Aufgabe 1:

Sei S_3 die symmetrische Gruppe und G eine Gruppe mit einer normalen Untergruppe N der Ordnung 5, so dass $G/N \cong S_3$ ist. Zeigen Sie:

a) $|G| = 30$.

b) G hat eine normale Untergruppe der Ordnung 15.

c) G besitzt mindestens drei Untergruppen der Ordnung 10, die nicht normal sind.

(6 Punkte)

Aufgabe 2:

Sei G eine Gruppe mit $|G| = 595 = 5 \cdot 7 \cdot 17$ und $H \leq G$ eine Untergruppe mit $|H| = 5$.
Zeigen Sie:

a) H ist ein Normalteiler von G.

b) H liegt im Zentrum von G.

(6 Punkte)

Aufgabe 3:

Sei ω eine primitive dritte Einheitswurzel über $\mathbb{Q}$. Der Ring $R = \mathbb{Z}[\omega]$ ist ein euklidischer Ring mit Normabbildung $N : R \to \mathbb{N}_0$ definiert durch

$$N(a + b\omega) = (a + b\omega)(a + b\omega^2) = a^2 - ab + b^2, \quad a, b \in \mathbb{Z}.$$

Zeigen Sie:

a) Ein Element $y \in R$ ist eine Einheit in $R \Leftrightarrow N(y) = 1$.

b) Sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl. Dann ist $p = a^2 - ab + b^2$ für geeignete $a, b \in \mathbb{Z}$ genau dann, wenn das Ideal $(p) \subset R$ kein Primideal ist.

c) Sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl und $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ der endliche Körper mit p Elementen. Das Ideal $(p) \subset R$ ist genau dann ein Primideal, wenn das Polynom $X^2 + X + 1 \in \mathbb{F}_p[X]$ irreduzibel ist.

(6 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Sei R ein Integritätsbereich und $R[X]$ der Polynomring über R. Für $r \in R$ sei $\phi_r : R[X] \to R$, $f \mapsto f(r)$ der Einsetzungshomomorphismus. Zeigen Sie:

a) Ist $I \subsetneq \mathbb{C}[X]$ ein Ideal, so gibt es ein $r \in \mathbb{C}$, so dass $\phi_r(I) = 0$.

b) Sei I das von 3 und $X^2 + 1$ erzeugte Ideal in $\mathbb{Z}[X]$. Dann ist $I \subsetneq \mathbb{Z}[X]$ und $\phi_r(I) = \mathbb{Z}$ für alle $r \in \mathbb{Z}$.

(6 Punkte)

Aufgabe 5:

Sei $k \subset K$ eine Körpererweiterung und $0 \neq \alpha \in K$ mit $K = k[\alpha]$. Weiter sei eine Potenz α^e (e eine positive ganze Zahl) von α in k enthalten. Sei n die minimale positive ganze Zahl, so dass $\alpha^n \in k$ ist. Zeigen Sie:

a) Ist $\alpha^m \in k$ für ein $m > 0$, so ist m ein Vielfaches von n.

b) Ist K/k eine separable Erweiterung, so ist die Charakteristik von k kein Teiler von n.

(6 Punkte)