Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

Sei p eine Primzahl und $q = p^l$ für ein $l > 0$ $(l \in \mathbb{N})$. Sei $\mathbb{F}_q$ der endliche Körper mit q Elementen.

a) Zeigen Sie, dass die Gruppe $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q)$ der 2×2-Matrizen mit Einträgen in $\mathbb{F}_q$ und Determinante 1 die Ordnung $q(q^2-1)$ hat.

Wir betrachten nun die Untergruppen

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q) \mid a \in \mathbb{F}_q^\times, b \in \mathbb{F}_q \right\}$$

und

$$N^- = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{F}_q) \mid a \in \mathbb{F}_q \right\}$$

von G. (3 Punkte)

a) Sei $\Omega = G/B$ die Menge der Linksnebenklassen von G bzgl. B. Bestimmen Sie die Ordnungen von N^- und B und die Anzahl $|\Omega|$ der Elemente aus Ω.

(1 Punkt)

b) Die Gruppe N^- operiert auf Ω durch Multiplikation von links. Zeigen Sie, dass diese Operation einen Fixpunkt besitzt.

(2 Punkte)

Aufgabe 2:

Gibt es ein $x \in \mathbb{Z}$ so, dass die Gleichung

$$x^{101} - (x+1)^{101} + x^2 - 47 \equiv 0 \bmod 101$$

erfüllt ist?

(3 Punkte)

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:

a) Bestimmen Sie den Zerfällungskörper $L \subset \mathbb{C}$ von

$$P(X) := (X^3 - 2)(X^2 - 5) \in \mathbb{Q}[X].$$

(2 Punkte)

b) Zerlegen Sie $P(X)$ über L in Linearfaktoren und bestimmen Sie $[L : \mathbb{Q}]$. (3 Punkte)

c) Bestimmen Sie ein primitives Element von L. (3 Punkte)

d) Bestimmen Sie die Galoisgruppe $Gal(L/\mathbb{Q})$. (3 Punkte)

Aufgabe 4:

Sei $R = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-7}}{2}] \subset \mathbb{C}$ gegeben. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass R bezüglich der Normfunktion

$$N\colon R \longrightarrow \mathbb{N},\ z \longmapsto z\overline{z},$$

ein euklidischer Ring ist.

a) Bestimmen Sie alle Einheiten von R. (2 Punkte)

b) Zerlegen Sie 3, 5 und 7 in Primfaktoren in R. (3 Punkte)

Aufgabe 5:

a) Die Anzahl der Tänzer in einem Ballsaal liegt zwischen 100 und 200. Stellt man sie in 11-er Reihen auf, so bleibt ein Tänzer allein. Stellt man sie dagegen in 5-er Reihen auf, so bleiben drei übrig. Und stellt man sie in 3-er Reihen auf, so bleiben zwei Tänzer allein. Wieviele Tänzer sind es genau? (3 Punkte)

b) Geben Sie explizit einen Ring-Isomorphismus

$$\varphi : \mathbb{Z}/57\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/19\mathbb{Z}$$

und seine Umkehrung φ^{-1} an. (2 Punkte)