Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

(a) Man zeige, dass die beiden Zahlen $12n + 1$ und $30n + 2$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ teilerfremd sind.

(b) Sei K ein Körper. Man zeige, dass der Polynomring $K[X]$ unendlich viele irreduzible Polynome enthält.
(Hinweis: Man verwende z.B. die Idee in Euklids Beweis der Unendlichkeit der Primzahlmenge.)

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Sei L/K eine Körpererweiterung. Seien $m, n \in \mathbb{N}$, sei A eine $m \times n$-Matrix mit Koeffizienten in K und sei $b \in K^m$. Zeigen Sie, dass das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ genau dann eine Lösung $x \in K^n$ hat, wenn es eine Lösung $x \in L^n$ hat.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Sei $(G, +)$ eine abelsche Gruppe. Die *Torsion* $T(G)$ von G ist die Menge aller Elemente endlicher Ordnung von G. Die Gruppe G heißt *torsionsfrei*, falls $T(G) = \{0_G\}$, wobei 0_G das neutrale Element von G bezeichnet.

(a) Sei $(G, +)$ eine abelsche Gruppe. Zeigen Sie:

   (i) $T(G)$ ist eine Untergruppe von G.

   (ii) $G/T(G)$ ist torsionsfrei.

(b) Geben Sie eine unendliche abelsche Gruppe mit nichttrivialer Torsion an.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Es seien p eine Primzahl und $\zeta \in \mathbb{C}$ eine primitive p-te Einheitswurzel. Es sei $\mathbb{Z}[\zeta]$ der Durchschnitt aller Teilringe von $\mathbb{C}$, die $\mathbb{Z}$ und ζ enthalten. Weiter seien $z_0, z_1, \ldots, z_{p-1} \in \mathbb{Z}$ und
$x := z_0 + z_1\zeta + \cdots + z_{p-1}\zeta^{p-1} \in \mathbb{Q}(\zeta)$. Zeigen Sie:

(a) $\mathbb{Z}[\zeta] = \{y_0 + y_1\zeta + \cdots + y_{p-2}\zeta^{p-2} \mid y_0, \ldots, y_{p-2} \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{Q}(\zeta)$.

(b) Ist $\frac{x}{p} \in \mathbb{Z}[\zeta]$, so gilt $z_0 \equiv \cdots \equiv z_{p-1} \pmod{p}$.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Sei p eine ungerade Primzahl und sei ζ eine primitive p-te Einheitswurzel. Zeigen Sie:

(a) Die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}$ hat genau einen Zwischenkörper Z vom Grad 2 über $\mathbb{Q}$.

(b) Komplexe Konjugation induziert ein Element der Ordnung 2 in der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$.

(c) Der Körper Z aus (a) ist genau dann ein Unterkörper von $\mathbb{R}$, wenn $p \equiv 1 \mod 4$.