Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

(a) Geben Sie die Definition einer *auflösbaren Gruppe* an.

(b) Sei $d \geq 1$ eine natürliche Zahl. Geben Sie eine Definition für das d-te *Kreisteilungspolynom* $\Phi_d(X)$ über den rationalen Zahlen an.

(c) Geben Sie eine Formulierung des *Satzes vom primitiven Element* an.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

(a) Geben Sie ein normiertes Polynom mit rationalen Koeffizienten an, welches $\sqrt{2} + \sqrt{7}$ als Nullstelle hat.

(b) Mit S_n wollen wir die symmetrischen, mit A_n die alternierenden Gruppen bezeichnen. Begründen Sie, warum $A_3 \times A_3$ die einzige 3-Sylowgruppe von $S_3 \times S_3$ ist.

(c) Sei $f(X) = X^2 + pX + q$ ein Polynom mit rationalen Koeffizienten. Was können Sie über die Galoissche Gruppe von $f(X)$ sagen, wenn die Diskriminante $\Delta := p^2 - 4q$ ein Quadrat in den rationalen Zahlen ist?

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Mit $\mathbb{Q}$ bezeichnen wir den Körper der rationalen Zahlen.

Sei $f(X)$ ein irreduzibles Polynom fünften Grades über den rationalen Zahlen, dessen galoissche Gruppe isomorph zur symmetrischen Gruppe S_5 ist. Mit L bezeichnen wir einen Zerfällungskörper von $f(X)$ über den rationalen Zahlen.

(a) Welchen Grad hat L über $\mathbb{Q}$? (Geben Sie eine kurze Begründung an.)

(b) Seien $x_1, \ldots, x_5$ die Nullstellen von $f(X)$ in L. Kann der Fall $x_i = x_j$ mit $i \neq j$ auftreten? (Geben Sie eine kurze Begründung an.)

(c) Für jedes $i = 0, \ldots, 5$ betrachten wir die Zwischenerweiterung $K_i = \mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_i)$ (d. h. insb. $K_0 = \mathbb{Q}$) von L über $\mathbb{Q}$. Bestimmen Sie den Grad von K_{i+1} über K_i für $i = 0, \ldots, 4$.

(d) Geben Sie Begründungen dafür an, warum $f(X)$ über $\mathbb{Q}$ nicht, dafür aber über K_1 auflösbar ist.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Zur Erinnerung: Eine komplexe Zahl heißt *algebraisch*, wenn sie Nullstelle eines Polynoms mit rationalen Koeffizienten ist.

(a) Sei $n \geq 1$ eine natürliche Zahl und sei $c \in \mathbb{C}^n$ ein nicht verschwindender Vektor aus komplexen Zahlen. Zeigen Sie, dass eine komplexe Zahl z algebraisch ist, wenn eine rationale $n \times n$-Matrix A mit

$$z \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

existiert.

(Hinweis: Betrachten Sie das charakteristische Polynom von A.)

(b) Seien x und y zwei algebraische Zahlen. Benutzen Sie die Aussage aus dem ersten Aufgabenteil, um zu zeigen, dass $z = x + y$ ebenfalls algebraisch ist. (Hinweis: Betrachten Sie einen Vektor c, dessen Einträge von der Form $x^i y^j$ sind.)

Aufgabe 5 (12 Punkte)

(a) Sei $\mathbb{Z}$ der Ring der ganzen Zahlen. Zeigen Sie, dass der Ring $\mathbb{Z}[i]/(2)$ (wobei $i^2 = -1$) genau vier Elemente hat.

(b) Sei R ein kommutativer Ring mit 1. Sei weiter $t \in R$. Zeigen Sie, dass jedes Element im Quotientenring $R[X]/(tX - 1)$ kongruent zu einem Element der Form aX^n modulo $tX - 1$ ist, wobei $a \in R$ und $n \geq 1$ eine natürliche Zahl ist.

(c) Für einen kommutativen Ring R mit 1 wollen wir mit $\operatorname{Spec}(R)$ die Menge der Primideale von R bezeichnen. Sei $\phi\colon R \to S$ ein Ringhomomorphismus in einen weiteren kommutativen Ring mit 1. Geben Sie einen Beweis dafür an, dass

$$\phi^{-1}\colon \operatorname{Spec}(S) \to \operatorname{Spec}(R), \mathfrak{p} \mapsto \phi^{-1}(\mathfrak{p})$$

eine wohldefinierte Abbildung ist.