Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

(a) Finden Sie alle rationalen Nullstellen des Polynoms $X^3 - 2X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$.

(b) Zeigen Sie, dass das Polynom $X^5 + 18X^2 - 15 \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist.

(c) Man zeige $1 + \sqrt{2} \in \mathbb{Q}(\sqrt{2} + \sqrt{3})$.

(d) Finden Sie i und k, so dass die Permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 7 & 4 & i & 5 & 6 & k & 9 \end{pmatrix}$ gerade ist.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Es sei $f \in \mathbb{Q}[X]$ ein irreduzibles Polynom, das sowohl reelle als auch nicht reelle Nullstellen hat. Man zeige, dass die Galoisgruppe von f über $\mathbb{Q}$ nicht abelsch ist.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Sei $L|K$ ein Körpererweiterung. Sei $\alpha \in L$ algebraisch über K und sei $F_\alpha \in K[X]$ das Minimalpolynom von α.
Zeigen Sie: Ist $\deg F_\alpha$ ungerade, so gilt $K(\alpha) = K(\alpha^2)$.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Sei G eine nicht abelsche Gruppe der Ordnung $715 = 5 \cdot 11 \cdot 13$. Zeigen Sie:

(a) 5 ist die einzige Primzahl, für die die Anzahl der p-Sylowgruppen von G echt größer als 1 ist.

(b) Sei p die Primzahl aus Aufgabenteil (a) und sei P eine p-Sylowgruppe von G. Bestimmen Sie den Isomorphietyp des Normalisators von P:
$$N_G(P) := \{g \in G \mid ghg^{-1} \in P \text{ für alle } h \in P\}.$$

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Es sei die Gleichung $X^2 + uX + v = 0$ mit $u, v \in \mathbb{F}_q$ betrachtet, wobei $\mathbb{F}_q$ der endliche Körper mit q Elementen ist.

(a) Zeigen Sie für ungerades q: Die Gleichung ist genau dann lösbar über $\mathbb{F}_q$, wenn $u^2 - 4v$ ein Quadrat in $\mathbb{F}_q$ ist.

(b) Zeigen Sie für gerades q und $u \neq 0$: Die Gleichung ist genau dann lösbar über $\mathbb{F}_q$, wenn v/u^2 von der Form $z^2 + z$ für ein $z \in \mathbb{F}_q$ ist.