Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

(a) Seien $k, \ell \in \mathbb{N}_0$ mit $k < \ell$. Betrachte die Polynome $X^{2^k} + 1$ und $X^{2^\ell} - 1$ aus $\mathbb{Q}[X]$. Man zeige, dass $X^{2^k} + 1$ ein Teiler von $X^{2^\ell} - 1$ ist.

(b) Für $m \in \mathbb{N}$ setze $n = 2^{2^m} + 1$. Man beweise, dass $2^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}$.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Sei $f(X) \in \mathbb{Z}[X]$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten.

(a) Man zeige für alle $a, c \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$: Aus $a \equiv c \pmod{n}$ folgt $f(a) \equiv f(c) \pmod{n}$.

(b) Man zeige: Sind $f(0)$ und $f(2019)$ ungerade, dann hat f keine ganzzahligen Nullstellen.

(c) Seien p und q zwei verschiedene Primzahlen. Man zeige: Gibt es ein $a \in \mathbb{Z}$, so dass $f(a)$ nicht durch p teilbar ist, und ein $b \in \mathbb{Z}$, so dass $f(b)$ nicht durch q teilbar ist, dann gibt es ein $c \in \mathbb{Z}$, so dass $f(c)$ weder durch p noch durch q teilbar ist.
(Hinweis: Man verwende den chinesischen Restsatz.)

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Seien $a \in \mathbb{Q}$, $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $i = \sqrt{-1}$ und $\gamma = a + \beta i$ algebraisch über $\mathbb{Q}$. Man zeige, dass $[\mathbb{Q}(\gamma) : \mathbb{Q}]$ gerade ist.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Seien S_3 die symmetrische Gruppe auf $\{1, 2, 3\}$ und $G = S_3 \times S_3$.

(a) Man zeige, dass G genau eine 3-Sylowgruppe hat.

(b) Man gebe drei verschiedene 2-Sylowgruppen P, Q und R von G an, sodass $| P \cap Q |= 1$ ist, aber $| P \cap R |> 1$ gilt.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Sei K ein Körper der Charakteristik $p \neq 0$, seien $a \in K$ und $f := X^p - X - a \in K[X]$.
Zeigen Sie:

(a) Sind L ein Erweiterungskörper von K und $b \in L$ eine Nullstelle von f, dann ist auch $b + 1$ eine Nullstelle von f.

(b) Entweder hat $f := X^p - X - a \in K[X]$ eine Nullstelle in K oder f ist irreduzibel.

(c) Ist f irreduzibel, dann ist die Galoisgruppe von f eine zyklische Gruppe der Ordnung p.