Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie:

(a) ggT (a, bc) teilt das Produkt ggT $(a, b) \cdot$ ggT (a, c).

(b) ggT (a, bc) kann verschieden sein von ggT $(a, b) \cdot$ ggT (a, c).

(c) ggT $(a, bc) =$ ggT $(a, b) \cdot$ ggT (a, c), falls b und c teilerfremd sind.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Sei H eine Untergruppe der (nicht notwendig endlichen) Gruppe G von endlichem Index $[G : H] = n \in \mathbb{N}$.

(a) Man zeige, dass es für alle $g \in G$ ein $j \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq j \leq n$ und $g^j \in H$ gibt.
(Hinweis: Betrachte die Nebenklassen $g^i H$, $0 \leq i \leq n$.)

(b) Man zeige an einem Beispiel, dass in (a) nicht zusätzlich gefordert werden kann, dass j ein Teiler von n ist.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Sei G eine endliche Gruppe. Zeigen Sie:

(a) Falls eine Untergruppe $H \subseteq G$ mit Index $[G : H] = k \in \mathbb{N}$ existiert, so existiert auch ein Normalteiler $N \trianglelefteq G$ mit $N \subseteq H$, so dass die Teilbarkeitsrelationen

$$k \mid [G : N] \text{ und } [G : N] \mid k!$$

erfüllt sind.
(Hinweis: Operation der Gruppe G auf der Menge der Linksnebenklassen von H in G durch Linksmultiplikation.)

(b) Zeigen Sie, dass es keine einfache Gruppe der Ordnung 108 geben kann.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Es bezeichne p eine Primzahl und $\mathbb{F}_p$ einen Körper mit p Elementen. Zeigen Sie:

(a) Ist $g(X) \in \mathbb{F}_p[X]$ irreduzibel über $\mathbb{F}_p$ vom Grad $\deg(g) = m$, so ist die Teilbarkeitsrelation

$$g(X) \mid \left(X^{p^m} - X\right)$$

erfüllt.

(b) Genau dann ist $f(X) \in \mathbb{F}_p[X]$ irreduzibel über $\mathbb{F}_p$, wenn für jedes $m \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq m \leq \frac{\deg(f)}{2}$ gilt, dass

$$\operatorname{ggT}\left(f(X), X^{p^m} - X\right) = 1 .$$

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Es seien $p \geq 3$ eine Primzahl und $\zeta \in \mathbb{C}$ eine primitive p-te Einheitswurzel.

(a) Sei $a \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass das Polynom $X^{a+1} - 1$ ein Teiler des Polynoms $X^{2a} - X^{a+1} - X^{a-1} + 1$ in $\mathbb{Q}[X]$ ist und bestimmen Sie den Quotienten.

(b) Zeigen Sie, dass die Körpererweiterung $\mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1}) \mid \mathbb{Q}$ galoissch ist und dass $(\mathbb{Q}(\zeta + \zeta^{-1})/\mathbb{Q})$ zyklisch der Ordnung $\frac{p-1}{2}$ ist.