Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1:

(a) Entscheiden Sie, ob es eine Potenz von 7 gibt, die mit den Ziffern 11 endet und begründen Sie Ihre Entscheidung.

(b) Ermitteln Sie die kleinste Potenz von 7, die auf 001 endet.

(c) Bestimmen Sie die letzten vier Ziffern von 7^{2020}.

Aufgabe 2:

(a) Begründen Sie für jeden der folgenden vier Ringe $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$, $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$, $\mathbb{F}_2[x]/\langle x^2 \rangle$ und $\mathbb{F}_2[x]/\langle x^2+x+1 \rangle$, ob er ein Körper ist.

(b) Zeigen Sie, dass die vier Ringe aus Teilaufgabe a) paarweise nicht isomorph sind.

Aufgabe 3:
Sei $V = \mathrm{Mat}_2(\mathbb{Q})$ der $\mathbb{Q}$-Vektorraum der 2×2 Matrizen über $\mathbb{Q}$ und sei $\phi : V \longrightarrow V$ die Linksmultiplikation mit der Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

(a) Zeigen Sie, dass ϕ eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung ist.

(b) Entscheiden Sie, ob das charakteristische Polynom von ϕ ist.

(b) Entscheiden Sie, ob das Minimalpolynom von ϕ ist.

Aufgabe 4:
Sei G eine Gruppe und sei H die Untergruppe von G, die aus allen Produkten von Elementen der Form g^2 mit $g \in G$ besteht.

(a) Bestimmen Sie H im Fall der alternierenden Gruppe $G = A_4$.

(b) Bestimmen Sie H im Fall der symmetrischen Gruppe $G = S_4$.

(c) Zeigen Sie $H \neq G$, falls G eine Untergruppe vom Index zwei besitzt.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 5:
Sei $\omega = \frac{1}{2}(1 - \sqrt{-3})$.

(a) Zeigen Sie, dass ω eine primitive sechste Einheitswurzel ist.

(b) Entscheiden Sie, ob $\mathbb{Q}(\omega, \sqrt[3]{5})$ eine galoissche Körpererweiterung von $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{5})$ ist.

(c) Entscheiden Sie, ob $\mathbb{Q}(\omega, \sqrt[6]{2})$ eine galoissche Körpererweiterung von $\mathbb{Q}$ ist.

(d) Finden Sie galoissche Körpererweiterungen L/K und $K/\mathbb{Q}$, so dass $L/\mathbb{Q}$ nicht galoissch ist.
Hinweis: Betrachten Sie $\sqrt[4]{2}$.