Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

**Aufgabe 1:**
Es sei $f = X^4 + aX + 2 \in \mathbb{Z}[X]$.

(a) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{Z}$, für die $f$ eine rationale Nullstelle besitzt.

(b) Zeigen Sie, dass $f$ für kein $a \in \mathbb{Z}$ in zwei quadratische Faktoren aus $\mathbb{Z}[X]$ zerfällt.

(c) Beweisen Sie: Der Restklassenring $\mathbb{Q}[X]/(f)$ ist, abhängig von $a$, entweder ein Körper oder isomorph zu einem direkten Produkt $K_1 \times K_2$ von zwei Körpern, die die Grade 1 bzw. 3 über $\mathbb{Q}$ haben und geben Sie an, für welche Werte von $a$ die jeweiligen Fälle eintreten.

**Aufgabe 2:**
Es sei $U$ eine Untergruppe einer endlichen einfachen Gruppe $G$ vom Index $n := (G : U) \geq 3$.

(a) Zeigen Sie, dass $G$ isomorph zu einer Untergruppe der $S_n$ ist.
Hinweis: Betrachten Sie eine geeignete Operation von $G$.

(b) Zeigen Sie, dass $|G|$ ein Teiler von $n!/2$ ist.

(c) Begründen Sie, ob die alternierende Gruppe $A_5$ eine Untergruppe der Ordnung 15 besitzt.

**Aufgabe 3:**
Sei $R$ ein Ring mit 1, und seien $a, b \in R$. Es gelte $ab = 1$ und $ba \neq 1$. Insbesondere ist $R$ also nicht kommutativ. Ein Element $x$ in $R$ heißt *nilpotent*, falls es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $x^n = 0$. Ein Element $x$ in $R$ heißt *idempotent*, falls $x^2 = x$ gilt.

(a) Zeigen Sie, dass das Element $1 - ba$ idempotent ist.

(b) Zeigen Sie, dass das Element $b^n(1 - ba)$ für $n \geq 1$ nilpotent ist.

(c) Zeigen Sie, dass es unendlich viele nilpotente Elemente in $R$ gibt.

**Aufgabe 4:**
Es sei $\mathbb{F}_3$ der Körper mit 3 Elementen. Sei $I$ das von $X^2 + 1$ im Polynomring $R = \mathbb{F}_3[X]$ erzeugte Ideal.

(a) Zeigen Sie, dass $K := R/I$ ein Körper ist und ermitteln Sie die Anzahl der Elemente von $K$.

(b) Geben Sie eine Formel an für das multiplikative Inverse des Elements $aX + b + I$ in $R/I$ für $a, b \in \mathbb{F}_3$, falls es existiert.

(c) Geben Sie einen Erzeuger an für die multiplikative Gruppe $K^\times$.

Fortsetzung nächste Seite!

**Aufgabe 5:**

Gegeben ist das Polynom $f = X^3 - 3X^2 + 3X - 6 \in \mathbb{Q}[X]$. Weiter sei $\zeta = e^{\frac{2\pi i}{3}} \in \mathbb{C}$ eine primitive dritte Einheitswurzel.

(a) Zeigen Sie, dass $f$ irreduzibel über $\mathbb{Q}$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $a_k = 1 + \zeta^k \sqrt[3]{5}$ für $k = 0, 1, 2$ die drei verschiedenen komplexen Wurzeln von $f$ sind.

(c) Zeigen Sie, dass $L = \mathbb{Q}(\sqrt[3]{5}, \zeta) \subseteq \mathbb{C}$ ein Zerfällungskörper von $f$ ist.

(d) Zeigen Sie, dass die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(L/\mathbb{Q})$ isomorph zur symmetrischen Gruppe $S_3$ ist.