Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Sei G eine Gruppe und seien a, b, c Elemente aus G.

(a) Zeigen Sie, dass a und a^{-1} dieselbe Ordnung haben.

(b) Zeigen Sie, dass ab und ba dieselbe Ordnung besitzen.

(c) Zeigen Sie, dass abc und bca dieselbe Ordnung besitzen.

(d) Geben Sie Elemente a, b, c in der symmetrischen Gruppe S_3 an, so dass abc und bac nicht dieselbe Ordnung besitzen.

(e) Zeigen Sie, dass es in einer nicht kommutativen Gruppe G stets Elemente a, b, c gibt, so dass abc und bac nicht dieselbe Ordnung haben.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

(a) Bestimmen Sie das Minimalpolynom m von $\sqrt[3]{2}$ über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass m über $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ nicht in Linearfaktoren zerfällt.

(b) Sei $\mathbb{F}_5$ der endliche Körper mit fünf Elementen. Geben Sie einen Körperisomorphismus $\varphi\colon \mathbb{F}_5[\sqrt{2}] \to \mathbb{F}_5[\sqrt{3}]$ explizit an.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Es sei L/K eine Körpererweiterung vom Grad 2.

(a) Zeigen Sie, dass L/K stets normal ist.

(b) Zeigen Sie, dass L/K im Fall $\operatorname{char} K \neq 2$ stets separabel ist.

(c) Geben Sie (mit Begründung) jeweils ein Beispiel für eine separable und eine inseparable Körpererweiterung L/K vom Grad 2 im Fall $\operatorname{char} K = 2$ an.

Hinweis: für den zweiten Teil: Betrachten Sie den rationalen Funktionenkörper $k(T)$ über einem Körper k.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Zu betrachten seien die Körpererweiterungen $\mathbb{Q}(\alpha)$ und $\mathbb{Q}(\beta)$ von $\mathbb{Q}$, wobei

$$\alpha := \sqrt{1+\sqrt{2}} \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad \beta := i\sqrt{\sqrt{2}-1} \in \mathbb{C}\,.$$

(a) Bestimmen Sie jeweils das Minimalpolynom von α und von β über $\mathbb{Q}$.

(b) Bestimmen Sie die Grade $[\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q}]$ und $[\mathbb{Q}(\beta) : \mathbb{Q}]$. Entscheiden Sie, ob die beiden Erweiterungen verschieden sind.

(c) Entscheiden und begründen Sie, ob die Körpererweiterungen $\mathbb{Q}(\alpha)$ und $\mathbb{Q}(\beta)$ von $\mathbb{Q}$ jeweils normal sind.

(d) Bestimmen Sie die Automorphismengruppen $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\alpha))$ und $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}(\beta))$.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

(a) Sei G eine Gruppe und $\mathrm{Aut}(G)$ deren Automorphismengruppe. Zeigen Sie, dass folgende Abbildung wohldefiniert ist und einen Gruppenhomomorphismus darstellt:

$$c\colon G \to \mathrm{Aut(G)}\,, \quad g \mapsto [c_g\colon x \mapsto gxg^{-1}]\,.$$

(b) Bezeichne S_3 die symmetrische Gruppe des Grades 3. Beweisen Sie, dass die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(S_3)$ zur Gruppe S_3 isomorph ist.