Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Sei S_5 die symmetrische Gruppe auf $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ und sei $A_5 \leq S_5$ die alternierende Gruppe. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) Sei $U \leq S_5$ eine Untergruppe mit 3 oder 5 Elementen. Dann ist $U \leq A_5$.

(b) S_5 hat genau 10 Untergruppen der Ordnung 3.

(c) S_5 hat genau 6 Untergruppen der Ordnung 5.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Es sei p eine Primzahl und $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ der endliche Körper mit p Elementen. Wir betrachten die Menge

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{F}_p^{\times},\ b \in \mathbb{F}_p \right\}$$

von 2×2-Matrizen über dem Körper $\mathbb{F}_p$.

(a) Zeigen Sie, dass $G \subseteq \mathrm{GL}(2, \mathbb{F}_p)$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass G eine Gruppe ist.

(c) Bestimmen Sie alle Primzahlen p, für die G abelsch ist.

(d) Bestimmen Sie alle Primzahlen p, für die G zu einer symmetrischen Gruppe S_n isomorph ist.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Sei L/K eine endliche Körpererweiterung und sei $\alpha \in L$. Zeigen Sie:

(a) Das Minimalpolynom f_α der K-linearen Abbildung $\varphi_\alpha\colon L \to L$, $x \mapsto \alpha x$, ist gleich dem Minimalpolynom g_α von α über K.

(b) Ist $L = K(\alpha)$, so stimmen das charakteristische und das Minimalpolynom von φ_α überein.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Es sei $\mathbb{F}_2$ der Körper mit zwei Elementen und $f = X^4 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$.

(a) Zeigen Sie, dass f irreduzibel ist.

(b) Sei $K = \mathbb{F}_2[X]/(f) = \mathbb{F}_2(\alpha)$ mit $\alpha = \bar{X}$ die durch Adjunktion einer Nullstelle von f entstandene algebraische Körpererweiterung von $\mathbb{F}_2$.
Zeigen Sie, dass α ein Erzeuger der multiplikativen Gruppe $K^\times$ ist.

(c) Zeigen Sie: In $K[X]$ gilt

$$f = (X - \alpha) \cdot (X - \alpha^2) \cdot (X - \alpha^4) \cdot (X - \alpha^8)\,.$$

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Seien m und n zwei positive ganze Zahlen mit $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$. Für jede positive ganze Zahl a sei $\zeta_a = e^{2\pi i/a} \in \mathbb{C}$; ζ_a ist eine primitive a-te Einheitswurzel. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\mathbb{Q}(\zeta_m, \zeta_n) = \mathbb{Q}(\zeta_{mn})$.

(b) $[\mathbb{Q}(\zeta_m, \zeta_n) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(\zeta_m) : \mathbb{Q}] \cdot [\mathbb{Q}(\zeta_n) : \mathbb{Q}]$.

(c) $\mathbb{Q}(\zeta_m) \cap \mathbb{Q}(\zeta_n) = \mathbb{Q}$.