Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Gegeben sei die Gruppe

$$G = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}(2, \mathbb{Q}) \mid a, b, c \in \mathbb{Q}, ac \neq 0\}$$

der invertierbaren oberen 2×2-Dreiecksmatrizen über $\mathbb{Q}$. Ferner seien

$$H = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in G \mid c = a\} \quad \text{und} \quad U = \{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \in G \mid b = 0\}.$$

(a) Zeigen Sie, dass H ein Normalteiler in G ist und dass durch

$$\varphi : \ G/H \longrightarrow \mathbb{Q}^\times \qquad \text{mit} \quad \varphi(\left[\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \right]) = \frac{a}{c}$$

ein wohldefinierter Gruppenisomorphismus gegeben ist.

(b) Zeigen Sie, dass U eine Untergruppe von G, aber kein Normalteiler ist.

(c) Betrachten Sie die Operation von U auf H durch Konjugation. Geben Sie ein Repräsentantensystem der Bahnen dieser Gruppenoperation an.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Sei R der Faktorring $R = \mathbb{Q}[X]/(X^2 - 7X + 12)$.

(a) Zeigen Sie, dass R als Ring zu $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ isomorph ist.

(b) Geben Sie explizit einen Ringisomorphismus $\varphi : \ \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \longrightarrow R$ an.

(c) Bestimmen Sie alle Zahlen $a \in \mathbb{Q}$, sodass die Restklasse von $X + a$ in R eine Einheit ist, und finden Sie jeweils das dazu inverse Element.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

(a) Sei L/K eine endliche Galoiserweiterung und sei $a \in L$. Zeigen Sie, dass a genau dann ein primitives Element für L/K ist, wenn die Elemente $\sigma(a)$ für $\sigma \in \mathrm{Gal}(L/K)$ paarweise verschieden sind.

(b) Beweisen Sie, dass $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)/\mathbb{Q}$ eine Galoiserweiterung ist und bestimmen Sie die Elemente der Galoisgruppe.

(c) Zeigen Sie, dass für alle $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ das Element $a = \sqrt{3} + q \cdot i$ ein primitives Element der Galoiserweiterung $\mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)/\mathbb{Q}$ ist.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Betrachten Sie das Polynom $f(X) = X^4 + 5X^2 + 5 \in \mathbb{Q}[X]$. Es sei $Z \subset \mathbb{C}$ sein Zerfällungskörper in $\mathbb{C}$ und $\alpha \in Z$ eine Nullstelle.

(a) Dividieren Sie das Polynom $f(X)$ durch $X^2 - \alpha^2 \in \mathbb{Q}(\alpha)[X]$, ohne die Nullstelle explizit zu berechnen.

(b) Zeigen Sie, dass die Gleichung $(\alpha^3 + 3\alpha)^2 = -(5 + \alpha^2)$ gilt.

(c) Zeigen Sie, dass $[Z : \mathbb{Q}] = 4$ und $\mathrm{Gal}(Z/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ gilt.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Sei $\Phi_n(X) \in \mathbb{Q}[X]$ das n-te Kreisteilungspolynom über $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie:

(a) Es gilt $X^n - 1 = (X - 1) \cdot h(X)$ mit einem Polynom $h(X) \in \mathbb{Q}[X]$ mit $h(1) = n$.

(b) Ist $n = p^k$ für eine Primzahl p und $k \geq 1$, so gilt $\Phi_n(1) = p$.

(c) Hat n mindestens zwei Primzahlen $p \neq q$ als Teiler, so ist $\Phi_n(1) = 1$.