Thema Nr. 2
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Eine *affine Ebene* in $\mathbb{R}^3$ ist die Menge aller Punkte (x, y, z) in $\mathbb{R}^3$, die eine Gleichung der Form $ax + by + cz + d = 0$ erfüllen mit fest vorgegebenen Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ und $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

(a) Für $j = 1, 2, 3, 4$ seien vier Punkte $P_j = (x_j, y_j, z_j) \in \mathbb{R}^3$ gegeben. Zeigen Sie, dass P_1, P_2, P_3, P_4 genau dann in einer affinen Ebene liegen, wenn gilt:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(b) Sei $C = \{(t, t^2, t^3) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\}$, und sei $E \subset \mathbb{R}^3$ eine affine Ebene. Zeigen Sie, dass $C \cap E$ höchstens drei Elemente hat.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

Sei K ein Körper, sei $K[X]$ der Polynomring über K in einer Unbestimmten, und sei $L = K(X)$ der Quotientenkörper von $K[X]$. Sei weiter

$$R = \{ \frac{a}{b} \mid a, b \in K[X],\ \mathrm{ggT}(a, b) = 1,\ b(0) \neq 0\} \subseteq L.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Menge R ist ein Unterring von L.

(b) Sei I ein Ideal von R. Dann ist $I \cap K[X]$ ein Ideal von $K[X]$.

(c) Der Ring R ist ein Hauptidealring.

Aufgabe 3 (12 Punkte)

(a) Es ist $337 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 + 7 = 13 \cdot 17 + 2^2 \cdot 29$. Erklären Sie, dass daraus folgt, dass 337 eine Primzahl ist.

(b) Sei p eine Primzahl und $n \geq 1$. Zeigen Sie, dass die Gleichung $x^n = 1$ in $\mathbb{F}_p$ genau $\mathrm{ggT}(n, p-1)$ verschiedene Lösungen besitzt.

(c) Ermitteln Sie alle positiven ganzen Zahlen n, für die die Gleichung $x^n = 1$ im Ring $R := \mathbb{Z}/2022\,\mathbb{Z}$ genau n Lösungen hat.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Sei $f = X^6 + 3 \in \mathbb{Q}[X]$, sei $\alpha \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von f, und sei $K = \mathbb{Q}(\alpha) \subset \mathbb{C}$. Zeigen Sie:

(a) Das Polynom f ist über $\mathbb{Q}$ irreduzibel.

(b) Die Zahl $\zeta := \frac{1}{2}(1 + \alpha^3) \in K$ ist eine primitive sechste Einheitswurzel.

(c) Der Körper K ist eine Galoiserweiterung von $\mathbb{Q}$.

(d) Die Galoisgruppppe $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q})$ ist nicht abelsch.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Sei G eine Gruppe der Ordnung 2022.

(a) Nennen Sie vier paarweise nicht isomorphe Beispiele von Gruppen der Ordnung 2022 und begründen Sie, dass die Gruppen paarweise nicht isomorph sind.

(b) Zeigen Sie, dass G auflösbar ist.

(c) Beweisen Sie, dass G einen Normalteiler H vom Index 2 besitzt.