Thema Nr. 3
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!
Alle Lösungsschritte sind sorgfältig zu begründen!

Aufgabe 1 (12 Punkte)

Gegeben sei eine endliche Körpererweiterung L/K. Weiterhin sei $\mathrm{Tr}_{L/K} : L \longrightarrow K$ die Abbildung, die jedem Element $a \in L$ die Spur der Multiplikation $m_a : L \longrightarrow L$ $(b \mapsto ab)$ zuordnet. Dabei ist die *Spur* einer K-linearen Abbildung $\varphi : L \longrightarrow L$ definiert als die Summe der Hauptdiagonalelemente einer Darstellungsmatrix.

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Tr}_{L/K}$ eine K-lineare Abbildung ist.

(b) Nun sei $\{a_1, \ldots, a_n\}$ eine K-Basis von L. Beweisen Sie, dass sich die *Diskriminante* $\Delta_{L/K}(a_1, \ldots, a_n) = \det(\mathrm{Tr}_{L/K}(a_i a_j)_{i,j})$ um einen Faktor aus $(K^\times)^2$ ändert, wenn man die Basis wechselt.

(c) Seien $p, q \in \mathbb{Q}$ so gewählt, dass $X^2 + pX + q$ ein irreduzibles Polynom ist. Finden Sie $\Delta_{L/K}(1, x)$ für $K = \mathbb{Q}$ und $L = K[X]/(X^2 + pX + q)$, wobei x die Restklasse von X in L bezeichne.

Aufgabe 2 (12 Punkte)

(a) Geben Sie eine vollständige Definition des kleinsten gemeinsamen Vielfachen zweier ganzer Zahlen an.

(b) Beweisen Sie mithilfe Ihrer Definition aus (a), dass für $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ die folgende Formel gilt:

$$\mathrm{kgV}(\mathrm{kgV}(a, b), \mathrm{kgV}(c, d)) = \mathrm{kgV}(\mathrm{kgV}(a, c), \mathrm{kgV}(b, d))$$

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Seien p, q, r Primzahlen mit $p < q < r$, und sei G eine Gruppe der Ordnung $p \cdot q \cdot r$. Für $i \in \{p, q, r\}$ bezeiche s_i die Anzahl der verschiedenen i-Sylowuntergruppen von G. Beweisen Sie:

(a) Besitzt G keine normale Sylowuntergruppe, so gilt $s_p \geq q$ und $s_q \geq r$ und $s_r = pq$.

(b) Die Gruppe G besitzt eine normale Sylowuntergruppe.

(c) Eine Gruppe der Ordnung 2022 ist nicht einfach.

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Sei $K = \mathbb{Z}[X]/(X^5 + 2,\ X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)$.

(a) Beweisen Sie, dass $3 \in (X^5 + 2,\ X^4 + X^3 + X^2 + X + 1)$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass K ein Körper ist.

(c) Beweisen Sie, dass K eine Galoiserweiterung seines Primkörpers $\mathbb{F}_3$ ist und bestimmen Sie die Galoisgruppe von $K/\mathbb{F}_3$.

(d) Sei x die Restklasse von X in K. Zeigen Sie, dass $\{x, x^3, x^9, x^{27}\}$ eine $\mathbb{F}_3$-Basis von K ist und bestimmen Sie die Darstellungsmatrizen der Elemente der Galoisgruppe $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{F}_3)$ bzgl. dieser Basis.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring mit Einselement, und sei I der Durchschnitt der maximalen Ideale von R.

(a) Zeigen Sie, dass I ein Ideal von R ist.

(b) Beweisen Sie, dass ein Element $a \in R$ genau dann in I liegt, wenn für alle $b \in R$ das Element $ab - 1$ eine Einheit von R ist.