
Prüfungsteilnehmer	Prüfungstermin	Einzelprüfungsnummer
--------------------	----------------	----------------------

Kennzahl: _____

Kennwort: _____

Arbeitsplatz-Nr.: _____

**Herbst
2023**

63912

**Erste Staatsprüfung für ein Lehramt an öffentlichen Schulen
— Prüfungsaufgaben —**

Fach: **Mathematik (vertieft studiert)**

Einzelprüfung: **Algebra**

Anzahl der gestellten Themen (Aufgaben): 3

Anzahl der Druckseiten dieser Vorlage: 7

Bitte wenden!

Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Aufgabe 1

(12 Punkte)

- (a) Seien $n \geq 1$ eine natürliche Zahl und $p \neq 2$ eine Primzahl. Zeigen Sie:

$$p \mid (1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n) \iff p \mid n \text{ oder } p \mid (n+1).$$

- (b) Bestimmen Sie die Anzahl der Elemente der Einheitengruppe

$$(\mathbb{Z}[X]/(2, X^3 + X^2 + X))^*$$

des angegebenen Quotientenringes.

- (c) Bestimmen Sie mithilfe des Chinesischen Restsatzes und unter vollständiger Angabe des Lösungsweges die kleinste natürliche Zahl $n \geq 1$, die die Kongruenzen $n \equiv 1 \pmod{3}$, $n \equiv 2 \pmod{5}$ und $n \equiv 0 \pmod{8}$ erfüllt.

Aufgabe 2

(12 Punkte)

Im Folgenden sei S_n die symmetrische Gruppe.

- (a) Sei $\sigma \in S_n$ ein Produkt $\sigma = \zeta_1 \cdots \zeta_m$ von paarweise disjunkten Zykeln ζ_j der Länge ℓ_j . Zeigen Sie, dass die Ordnung von σ gleich dem kleinsten gemeinsamen Vielfachen von ℓ_1, \dots, ℓ_m ist.
- (b) Bestimmen Sie die maximale Ordnung eines Elements
(i) der S_6 ; (ii) der S_7 .

Aufgabe 3

(12 Punkte)

- (a) Seien G eine einfache Gruppe mit $|G| > 2$, die auf der endlichen Menge X operiere, und $\rho: G \rightarrow \Sigma(X) \simeq S_n$ ($n := |X|$) der zugehörige Gruppenhomomorphismus in die symmetrische Gruppe von X . Zeigen Sie, dass $\rho(G)$ in der alternierenden Gruppe A_n enthalten ist.
- (b) Seien G eine nicht-abelsche einfache Gruppe, $H \subseteq G$ eine Untergruppe sowie $n := (G : H) \geq 2$. Zeigen Sie, dass G isomorph zu einer Untergruppe von A_n ist, und dass $n \geq 5$ gilt.
- (c) Zeigen Sie, dass keine endliche einfache Gruppe der Ordnung 80 existiert.

Aufgabe 4

(12 Punkte)

Sei R ein kommutativer Ring (mit 1). Sei weiter $I \subseteq R$ ein Ideal. Wir definieren das *Radikal* von I als

$$\text{rad}(I) = \{r \in R \mid r^n \in I \text{ für ein } n \in \mathbb{Z}_{>0}\}.$$

Zeigen Sie:

- (a) $\text{rad}(I)$ ist ebenfalls ein Ideal von R .
- (b) Ist I ein Primideal, dann gilt $\text{rad}(I) = I$.

Aufgabe 5

(12 Punkte)

- (a) Zeigen Sie, dass der Kreisteilungskörper $\mathbb{Q}(\zeta_8)$ genau drei quadratische Teilkörper besitzt, d. h. Zwischenkörper $\mathbb{Q} \subseteq K \subseteq \mathbb{Q}(\zeta_8)$ mit $[K : \mathbb{Q}] = 2$.
- (b) Bestimmen Sie in Teil (a) drei Elemente $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{Q}$ so, dass die Zwischenkörper $K_i := \mathbb{Q}(\sqrt{\alpha_i})$ ($1 \leq i \leq 3$) genau die quadratischen Teilkörper sind.
- (c) Zeigen Sie, dass das Polynom $X^4 + X + 1 \in \mathbb{F}_2[X]$ irreduzibel ist.
- (d) Nach Teil (c) gilt $\mathbb{F}_{16} = \mathbb{F}_2(\alpha)$ für ein $\alpha \in \overline{\mathbb{F}_2}$ mit $\alpha^4 + \alpha + 1 = 0$. Bestimmen Sie die Grade $[\mathbb{F}_2(\beta) : \mathbb{F}_2]$ in den beiden Fällen $\beta = \alpha + 1$ und $\beta = \alpha^3 + 1$.