

Thema Nr. 3  
(Aufabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufabengruppe zu bearbeiten!

Zum Erreichen der vollen Punktzahl sind alle mathematischen Gedankengänge sprachlich angemessen, nachvollziehbar und logisch exakt zu begründen. Für jede der 5 Aufgaben werden maximal 6 Punkte vergeben. Die höchste erreichbare Punktzahl beträgt somit 30 Punkte.

**Aufgabe 1:**

- a) Gegeben seien eine Zahlenfolge  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  in  $\mathbb{C}$  und  $a \in \mathbb{C}$ . Geben Sie eine Definition dafür an, dass  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  gegen  $a$  konvergiert, ohne den Konvergenzbegriff in  $\mathbb{R}$  zu verwenden.
- b) Sei  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  eine Folge in  $\mathbb{C}$  und  $a_k = b_k + ic_k$  mit  $b_k, c_k \in \mathbb{R}$  für  $k \in \mathbb{N}$ . Geben Sie an, welche Beziehung zwischen der Konvergenz der Folge  $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$  und der Konvergenz der beiden Folgen  $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}, (c_k)_{k \in \mathbb{N}}$  besteht. Beweisen Sie diese Beziehung unter Verwendung der Definition aus Teilaufgabe a).
- c) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

$$(i) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k + i k^2}{2k^3 + \cos(k)} \qquad (ii) \sum_{k=1}^{\infty} (-i)^k \frac{\cos(k) + \sin(2k)}{(4 - \cos(2k))^k}$$

**(1 + 2 + 3 Punkte)**

**Aufgabe 2:**

Es sei  $f : ]0, \infty[^2 \rightarrow \mathbb{R}$

$$(t, x) \mapsto \frac{x \ln(x)}{t}$$

- a) Zeigen Sie, dass für jedes  $(\tau, \xi) \in ]0, \infty[^2$  das Anfangswertproblem

$$\dot{x} = f(t, x), \quad x(\tau) = \xi$$

eine eindeutige maximale Lösung  $\lambda_{(\tau, \xi)} : I_{(\tau, \xi)} \rightarrow \mathbb{R}$  besitzt.

- b) Bestimmen Sie für jedes  $\xi \in ]0, \infty[$  die maximale Lösung  $\lambda_{(1, \xi)}$  von  $\dot{x} = f(t, x), x(1) = \xi$ .
- c) Zeigen Sie, dass die Lösung  $\lambda_{(1, e)}$  eine positive untere Schranke besitzt.

**(1 + 4 + 1 Punkte)**

**Aufgabe 3:**

Bestimmen Sie alle holomorphen Funktionen  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  und  $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  mit der Eigenschaft

- a)  $f(0) = 1$  und  $\operatorname{Re} f(z) \geq 1$  für alle  $z \in \mathbb{C}$  bzw.  
 b)  $g'(z) = g(z)^2$  für alle  $z \in \mathbb{C}$ .

**(2 + 4 Punkte)****Aufgabe 4:**

Wir betrachten das zweidimensionale Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y \sin(x) - x \\ \dot{y} &= x \sin(x)\end{aligned}$$

- a) Zeigen Sie, dass das zugehörige Anfangswertproblem mit

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 0$$

eine eindeutige, auf ganz  $\mathbb{R}$  existierende Lösung besitzt.

*Hinweis:* Die rechte Seite der Differentialgleichung lässt sich gut abschätzen.

- b) Sei  $z = (x, y) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  die Lösung des Anfangswertproblems aus Teilaufgabe a). Zeigen Sie, dass  $\|z(1)\|_2 \leq 1$ . Hierbei bezeichnet  $\|\cdot\|_2$  die euklidische Norm auf  $\mathbb{R}^2$ .  
 c) Sei  $z = (x, y) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  die Lösung des Anfangswertproblems aus Teilaufgabe a). Zeigen Sie, dass sogar  $\|z(1)\|_2 < 1$ .

**(2 + 2 + 2 Punkte)****Aufgabe 5:**

Betrachten Sie das folgende Integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)(5+4\cos x)}$$

- a) Begründen Sie, dass dieses Integral existiert und endlich ist.  
 b) Begründen Sie, dass auf  $H := \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z > -\ln 2\}$  durch  $h(z) := 1/(2+e^{iz})$  eine holomorphe Funktion  $h : H \rightarrow \mathbb{C}$  definiert wird.  
 c) Zeigen Sie für alle  $x \in \mathbb{R}$  die Identität

$$\operatorname{Re} \left( \frac{4}{2+e^{ix}} \right) = 1 + \frac{3}{5+4\cos x}.$$

- d) Zeigen Sie mittels komplexer Integration, dass das Integral den Wert  $\frac{\pi}{3} \cdot \frac{2e-1}{2e+1}$  hat.

**(1 + 1 + 1 + 3 Punkte)**