Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

1. Aufgabe (4 Punkte)
Zeigen Sie, dass eine rationale Funktion $f = p/q$ genau dann in ∞ eine hebbare Singularität hat, wenn $Grad(p) \leq Grad(q)$ gilt. Wann ist $f(\infty) \neq 0$?

2. Aufgabe (5 Punkte)
Berechnen Sie das Integral

$$\oint_{|z|=2} \tan(z)dz.$$

3. Aufgabe (6 Punkte)
Es sei G ein Gebiet in $\mathbb{C}$ und $f\colon G \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. f habe in $z_0 \in G$ eine Nullstelle der Ordnung n. Zeigen Sie: Genau dann kann man nahe z_0 aus f eine holomorphe k-te Wurzel ziehen , d.h. eine in einer Umgebung $U \subset G$ von z_0 definierte holomorphe Funktion $g\colon U \to \mathbb{C}$ finden, so dass für $z \in U$ $g(z)^k = f(z)$ gilt, wenn k ein Teiler von n ist.

4. Aufgabe (6 Punkte)
Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Rouché die Anzahl der Nullstellen von $f(z) = e^z + 3z^4$ in der Einheitskreisscheibe $\mathbb{E} := \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < 1\}$. Begründen Sie, warum in $\mathbb{E} \cap \{z \in \mathbb{C}\colon \mathrm{Im} z > 0\}$ genau zwei Nullstellen liegen.

5. Aufgabe (9 Punkte)
Betrachten Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\sin x_1. \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie alle Fixpunkte ($\dot{x}_1 = \dot{x}_2 = 0$) und die Linearisierungen um diese.
b) Welche Fixpunkte sind bezüglich ihrer Linearisierungen stabil?
c) Welche Fixpunkte sind stabil? *Hinweis*: Konstruieren Sie ein Integral zum Nachweis der Stabilität.