## Thema Nr. 1
(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

***Vorbemerkung:*** *Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt 30 Punkte. Begründen Sie alle Schlussweisen und Rechenschritte durch einen kurzen Text.*

**Aufgabe 1:** Es sei $D^* := \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < 1\}$ der punktierte Einheitskreis und $f : D^* \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion, so dass der Limes

$$\lim_{z\to 0} |z|^{3/2} |f(z)| =: c \in \mathbb{R}$$

existiert.
Man zeige, dass dann notwendig $c = 0$ gilt. Welche Art von Singularität kann $f$ im Nullpunkt haben?

**Aufgabe 2:** Sei $r > 0$. Man berechne das Integral

$$\int_{|z|=r} z^2 \sin(\bar{z})dz$$

(z.B. mittels Potenzreihen-Entwicklung des Integranden).

**Aufgabe 3:** Sei $G_0 \subset \mathbb{C}$ das Gebiet

$$G_0 := \mathbb{C} \setminus \{iy : -1 \le y \le +1\}$$

und

$$G := G_0 \cup \{\infty\} \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\} = \mathbb{P}_1$$

das Gebiet auf der Riemannschen Zahlenkugel $\mathbb{P}_1$, das aus $G_0$ durch Hinzufügen des unendlich fernen Punktes entsteht.
Man zeige:

a) $G$ ist einfach zusammenhängend.

b) Es gibt in $G_0$ einen holomorphen Zweig des Logarithmus von $\frac{z^2}{1+z^2}$, d.h. eine holomorphe Funktion $f : G_0 \to \mathbb{C}$ mit

$$\exp(f(z)) = \frac{z^2}{1+z^2} \text{ für alle } z \in G_0.$$

Der Zweig sei so gewählt, dass $f(1)$ reell ist.

c) Man berechne das Integral

$$\int_{|z|=2} zf(z)dz.$$

Fortsetzung nächste Seite!

**Aufgabe 4:** Gegeben sei das autonome System

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x^2 y - \sin x \end{pmatrix}.$$

a) Man bestimme die kritischen Punkte (= Ruhepunkte) des Systems.

b) Man linearisiere das System und untersuche die kritischen Punkte auf Stabilität.

*Hinweis zu b):* Für (0, 0) geeignete Ljapunovfunktion verwenden.

**Aufgabe 5:** Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $n > 0$. Wir betrachten $n$-mal stetig differenzierbare Funktionen $\alpha_1, \ldots, \alpha_n : I \to \mathbb{R}$, so dass die Determinate der Matrix

$$W(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1(t) & \alpha_2(t) & \ldots. & \alpha_n(t) \\ \alpha_1'(t) & \alpha_2'(t) & \ldots. & \alpha_n'(t) \\ \alpha_1^{(2)}(t) & \alpha_2^{(2)}(t) & \ldots. & \alpha_n^{(2)}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{(n-1)}(t) & \alpha_2^{(n-1)}(t) & \ldots & \alpha_n^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$$

für alle $t \in I$ von Null verschieden ist. Zeigen Sie, dass es eindeutig bestimmte stetige Funktionen $b_o, \ldots, b_{n-1} : I \to \mathbb{R}$, gibt, so dass $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ ein Fundamentalsystem von Lösungen der homogenen linearen Differentialgleichung $n$-ter Ordnung

$$y^{(n)} + b_{n-1}(t) y^{(n-1)} + \ldots + b_1(t) y' + b_0(t) y = 0$$

bilden.