Thema Nr. 2

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Vorbemerkung: *Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktzahl beträgt 30 Punkte. Begründen Sie alle Schlussweisen und Rechenschritte durch einen kurzen Text.*

Aufgabe 1: Gegeben seien die Funktionen

$$u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad u(x,y) := e^{-y}(x\cos(x) - y\sin(x))$$
$$v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad v(x,y) := e^{-y}(y\cos(x) + x\sin(x))$$

a) Zeigen Sie, dass diese Funktionen die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen erfüllen, und dass deswegen die Funktion

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \quad z = x + iy \in \mathbb{C},$$

holomorph ist.

b) Zeigen Sie für $z = iy$, $y \in \mathbb{R}$, dass

$$f(z) = ze^{iz}$$

und folgern Sie daraus $f(z) = ze^{iz}$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 2: Gegeben sei die auf $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2 - 1}$$

a) Bestimmen Sie alle Pole dieser Funktion und die Residuen in diesen Polen.

b) Berechnen Sie $\int_{\gamma_1} f(z)dz$ für den Weg

$$\gamma_1(t) = 2e^{it}, 0 \le t \le 2\pi.$$

c) Berechnen Sie $\int_{\gamma_2} f(z)dz$ für den Weg

$$\gamma_2(t) = \begin{cases} 1 + e^{it}, & -\pi \le t \le \pi, \\ -1 + e^{i(\pi - t)}, & \pi \le t \le 3\pi. \end{cases}$$

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3: Zeigen Sie:

a) Die Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2nz - n^2}, n \in \mathbb{Z}, z \in \mathbb{C},$$

konvergiert auf $\mathbb{C}$ kompakt gegen eine holomorphe Funktion $f(z)$.

b) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$f(z+1) = e^{1+2z} f(z) \text{ und } f(z + \pi i) = f(z).$$

c) Es werde $g(z) := e^{-z^2} f(z)$ gesetzt. Dann gilt

i) $g(z+1) = g(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$,

ii) $|g(z)|$ ist auf dem Streifen $\{z \in \mathbb{C} : 0 \leq Re(z) \leq 1\}$ nicht beschränkt.

Aufgabe 4: Lösen Sie für das System von Differentialgleichungen

$$\frac{dy_1}{dx} = 2y_2 + x$$

$$\frac{dy_2}{dx} = -2y_1$$

das Anfangswertproblem

$$\begin{pmatrix} y_1(\pi) \\ y_2(\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 5: Gegeben sei das autonome System

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + y - 2 \\ x^2 - y - 4 \end{pmatrix}.$$

a) Man bestimme die kritischen Punkte (= Ruhepunkte) des Systems.

b) Man linearisiere das System und untersuche die kritischen Punkte auf Stabilität.