Thema Nr. 1

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Bei den folgenden Aufgaben 2 - 5 sind alle Rechnungen und Schlussfolgerungen mit einem erklärenden Text zu begründen. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben.

Aufgabe 1:

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen über das Anfangswertproblem

$$(*) \qquad y' = f(y), \quad y(0) = y_0$$

richtig oder falsch sind. Bei richtigen Aussagen geben Sie eine kurze Begründung (mit Nennung aller benutzten Sätze) an, bei falschen ein Gegenbeispiel.

(a) Für jedes $y_0 \in \mathbb{R}$ hat $(*)$ eine eindeutige Lösung auf einem geeigneten Intervall $[0, \delta]$.

(b) Erfüllt f eine globale Lipschitzbedingung auf $\mathbb{R}$, so hat $(*)$ für jedes $y_0 \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung auf einem geeigneten Intervall $[0, \delta]$.

(c) Ist $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit beschränkter Ableitung, so hat $(*)$ für jedes $y_0 \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung auf einem geeigneten Intervall $[0, \delta]$.

(d) Hat $(*)$ für jedes $y_0 \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung auf einem geeigneten Intervall $[0, \delta]$, so erfüllt f eine globale Lipschitzbedingung auf $\mathbb{R}$.

(e) Hat $(*)$ für alle $y_0 \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung, so existieren alle diese Lösungen auf ganz $\mathbb{R}$.

(f) Hat $(*)$ für alle $y_0 \in \mathbb{R}$ eine eindeutige Lösung, so existiert mindestens eine dieser Lösungen auf ganz $\mathbb{R}$.

Aufgabe 2:

Finden Sie eine Lösung $y = y(x)$ des Anfangswertproblems

$$y' = (x + y)^2, \qquad y(0) = 0.$$

Was ist der maximale Definitionsbereich dieser Lösung? Ist diese Lösung eindeutig?

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:

(a) Formulieren Sie den Residuensatz für den Spezialfall einer Funktion, die nur im Nullpunkt eine Singularität hat.

(b) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_{|z|=r} \sin^n \frac{1}{z}\, dz$ für beliebiges $r > 0$ und $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 4:

Für $0 \leq r < R \leq \infty$ bezeichne $A_{r,R} = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < R\}$ den Kreisring um 0 mit innerem Radius r und äußerem Radius R. Sei

$$f(z) = \frac{4}{z(z^2-2)} \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}).$$

(a) Bestimmen Sie die Laurententwicklung von f in $A_{0,1}$ und $A_{2,4}$.

(b) Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_{|\zeta|=1} f(\zeta)\, d\zeta$ sowie die Differenz der beiden Integrale $\displaystyle\int_{|\zeta|=2} f(\zeta)\, d\zeta$ und $\displaystyle\int_{|\zeta|=1/2} f(\zeta)\, d\zeta$.

Aufgabe 5:

Sei $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ die kompaktifizierte komplexe Ebene, und sei $f : \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ die durch $w = f(z) := z/(z-i)$ gegebene gebrochen-lineare Funktion.

(a) Bestimmen Sie die Fixpunkte von f, die Umkehrabbildung f^{-1} und die Bilder bzw. Urbilder von 0, 1, i und ∞.

(b) Skizzieren Sie das Bild der rechten Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq 0\}$, der oberen Halbebene $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$, und des offenen Einheitskreises $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ unter der Abbildung f.