Thema Nr. 2

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Bei den folgenden Aufgaben 1 - 5 sind alle Rechnungen und Schlussfolgerungen mit einem erklärenden Text zu begründen. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben.

Aufgabe 1:

Sei $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$. Die Abbildung $s : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ mit $s(z) = r^2/\bar{z}$ heisst Spiegelung am Kreis $\{z \in \mathbb{C} : |z| = r\}$.

(a) Zeigen Sie, dass s einen $\mathbb{R}$-Diffeomorphismus von $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ auf sich induziert. Ist dieser biholomorph, d.h. holomorph mit holomorpher Umkehrabbildung?

(b) Berechnen Sie das Bild der offenen Halbebene $H = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 2r\}$ unter der Abbildung s.

Aufgabe 2:

(a) Bestimmen Sie die Pole und deren Ordnungen der komplexen Funktionen $f(z) = 1/\sin z$ und $g(z) = \sin(1/z)$ in $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

(b) Zeigen Sie, dass die komplexe Gleichung $\cos(1/z) = c$ für fast alle $c \in \mathbb{C}$ (d.h. für c aus einer in $\mathbb{C}$ dichten Teilmenge) in jeder Umgebung der 0 unendlich viele Lösungen z besitzt.

Aufgabe 3:

Berechnen Sie für $a \in \mathbb{R}$, $a > 1$ das Integral $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{a + \cos\varphi}$.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

(a) Sei $-\infty < a < b < \infty$ und $\varphi : (a,b) \to \mathbb{R}$ maximale Lösung einer autonomen gewöhnlichen reellen Differentialgleichung erster Ordnung. Ist φ beschränkt?

(b) Geben Sie die Lösungen $y = \varphi(x)$ der reellen Differentialgleichung

$$y' \sin x = y \log y$$

an. Welche dieser Lösungen existieren auf ganz $\mathbb{R}$?

(c) Finden Sie diejenige Lösung aus (b), die der Anfangsbedingung $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 1$ genügt.

Aufgabe 5:

Zeigen Sie, dass im metrischen Raum $(\mathbb{N}, d)$ mit der Metrik $d(m,n) := |m-n|/mn$ jede einpunktige Menge offen ist. Wie sehen die abgeschlossenen, zusammenhängenden und kompakten Mengen in diesem metrischen Raum aus?