Thema Nr. 3

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Bei den folgenden Aufgaben 1 - 5 sind alle Rechnungen und Schlussfolgerungen mit einem erklärenden Text zu begründen. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben.

Aufgabe 1:

Sei $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ die offene komplexe Einheitskreisscheibe, und sei $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(0) = 0$. Beweisen Sie:

(a) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} f(z^n)$ konvergiert kompakt auf $\mathbb{D}$.

(b) Ist f holomorph auf einer offenen Umgebung U von $\overline{\mathbb{D}}$ und konvergiert die Reihe in (a) absolut für alle $z \in \overline{\mathbb{D}}$, so ist $f = 0$.

Aufgabe 2:

(a) Sei $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ die punktierte komplexe Ebene, und sei $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ holomorph mit $|f(z)| \leq 1 + 1/|z|^2$ für alle $z \in \mathbb{C}^*$. Zeigen Sie, dass f dann die Form

$$f(z) = a + \frac{b}{z} + \frac{c}{z^2} \qquad (z \in \mathbb{C}^*)$$

mit geeigneten Konstanten $a, b, c \in \mathbb{C}$ hat.

(b) Seien $f, g : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ holomorph, wobei g in 0 einen Pol der Ordnung $k > 0$ habe. Es gelte $f(\frac{1}{n}) = g(\frac{1}{n})$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann $f = g$ ist oder f in 0 eine wesentliche Singularität hat.

Aufgabe 3:

Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 - 2x + 5}{x^4 + 5x^2 + 4}\, dx$$

mit Hilfe des Residuensatzes. Begründen Sie dabei alle Abschätzungen für die benutzten Wegintegrale.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Sei $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig und in der zweiten Variablen y lokal Lipschitz-stetig. Geben Sie die Definition des Begriffs der "maximalen Lösung" des Anfangswertproblems

$$(*) \qquad y' = f(x,y), \qquad y(x_0) = y_0$$

an.
Bestimmen Sie die maximale Lösung des Problems $(*)$ im Falle $f(x,y) = x^2y^2$.

Aufgabe 5:

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, und seien $P, Q : G \to \mathbb{R}$ zwei C^1-Funktionen. Wann heisst eine Differentialgleichung der Form $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ *exakt* auf G? Geben Sie eine Bedingung hierfür an und illustrieren Sie dies anhand des Beispiels

$$2xe^y dx + (x^2e^y - 1)dy = 0$$

auf $G = \mathbb{R}^2$. Finden Sie diejenige Lösungkurve (in impliziter Form), die durch den Punkt $(1,0)$ geht.