

Thema Nr. 2

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Bei den folgenden Aufgaben sind alle Schlussfolgerungen und nichttrivialen Rechnungen mit einem erklärenden Text zu begründen. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben.

Aufgabe 1:

Sei D der Durchschnitt der beiden offenen Kreisscheiben $\{z \in \mathbb{C} : |z - i| < 1\}$ und $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| < 1\}$. Bestimmen Sie das Bild von D unter der Möbiustransformation

$$f(z) = \frac{z}{z - (1 + i)}.$$

Aufgabe 2:

Für $n = 0, 1, 2, \dots$ sei $P_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ das durch

$$P_n(z) := \frac{1}{n! 2^n} \frac{d^n}{dz^n} \{(z^2 - 1)^n\}$$

definierte Polynom vom Grad n .

a) Beweisen Sie die Gleichheit

$$P_n(z) = \frac{1}{2^{n+1} \pi i} \int_C \frac{(\zeta^2 - 1)^n}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta,$$

wobei C eine beliebige positiv orientierte, einfach geschlossene Kurve sei, die z in ihrem Inneren enthält.

b) Verwenden Sie a) zur Berechnung von $P_n(1)$ und $P_n(-1)$.

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie eine meromorphe Funktion f auf \mathbb{C} mit folgenden drei Eigenschaften:

1. Die Polemenge von f ist $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$.
2. Alle Pole von f haben die Ordnung 1.
3. Das Residuum von f bei $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ist n .

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Anfangswertproblems

$$y'' - y' - 2y = \cosh(2x), \quad y(0) = 1.$$

Aufgabe 5:

Gegeben sei das autonome System

$$(*) \quad \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x + 2x^3. \end{cases}$$

- a) Bestimmen und klassifizieren Sie alle Gleichgewichtspunkte von (*).
- b) Skizzieren Sie (etwa durch Integration von $\frac{dy}{dx}$) die Trajektorien für das zugeordnete lineare System.
- c) Zeigen Sie, dass unter den Trajektorien aus b) nur diejenige für $t \rightarrow \infty$ gegen $(0,0)$ strebt, für die immer $y = -x$ gilt.
- d) Bestimmen Sie die Trajektorien des Systems (*).