Thema Nr. 3

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Bei den folgenden Aufgaben sind alle Schlussfolgerungen und nichttrivialen Rechnungen mit einem erklärenden Text zu begründen. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben.

Aufgabe 1:

Es sei $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ holomorph und erfülle

(*) $$f\left(\frac{1}{n}\right) = (-1)^n \frac{1}{n} \qquad (n = 1,2,3\ldots).$$

a) Beweisen Sie, dass f in 0 weder eine hebbare Singularität noch eine Polstelle haben kann.

b) Geben Sie konkret eine in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ holomorphe Funktion mit der Eigenschaft (*) an.

Aufgabe 2:

a) Formulieren Sie den Satz über das Null- und Polstellen zählende Integral und begründen Sie, warum $\oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$ die Änderung des Arguments von $f(z)$ längs γ beschreibt.

b) Betrachten Sie die Funktion $f(z) = z^6 + 2z + 1$. Zeigen Sie, ohne die Nullstellen explizit zu berechnen, dass f im Quadranten $Q : \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ genau eine Nullstelle besitzt. Bestimmen Sie zum Beweis die Änderung von $\arg f(z)$ längs der Kurve, die bei hinreichend großem R den Viertelkreis $\{z \in Q : |z| < R\}$ berandet.

Aufgabe 3:

In dieser Aufgabe sei $f(z) := \dfrac{1}{z^2+1}$ vorgegeben.

a) Berechnen Sie die Residuen von f an den Stellen i und $-i$.

b) Betrachtet wird das Gebiet $G := \mathbb{C} \setminus \{iy : y \in \mathbb{R}, |y| \geq 1\}$ (Skizze!). Zeigen Sie, dass f auf G eine Stammfunktion besitzt, nicht jedoch auf $\mathbb{C} \setminus \{-i, i\}$.

c) Es sei F die Stammfunktion zu f auf G mit dem Wert $F(0) = 0$. Zeigen Sie: Für alle $z \in G$ und $k \in \mathbb{Z}$ ist $F(z) \neq (k + \frac{1}{2})\pi$ und $\tan(F(z)) = z$, d.h. F ist ein Zweig des Arcustangens.

[Zum Beweis ist F nicht formelmäßig anzugeben, sondern der Identitätssatz ist zunächst auf ein gewisses Teilgebiet von G anzuwenden.]

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 4:

Betrachtet wird die Differentialgleichung

$$(**) \qquad \eta'' - \frac{1}{x}\eta' + \frac{1}{x^2}\eta = 0 \qquad (x \in (0,\infty)).$$

a) Zeigen Sie, dass $(**)$ genau eine Lösung der Form $\eta_1(x) = x^\lambda$ mit einem (zu bestimmenden) $\lambda \in \mathbb{R}$ besitzt.

b) Berechnen Sie eine weitere Lösung η_2 von $(**)$, die zusammen mit η_1 ein Fundamentalsystem bildet, indem Sie den Ansatz $\eta_2(x) =: \eta_1(x) \cdot v(x)$ machen und die resultierende Differentialgleichung für $v(x)$ lösen.

Aufgabe 5:

Betrachtet wird das autonome Differentialgleichungssystem im $\mathbb{R}^2$

$$(***) \qquad \begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = x^2 - y \end{cases}$$

a) Zeigen Sie, dass das System $(***)$ genau einen Gleichgewichtspunkt besitzt, und untersuchen Sie dessen Stabilität.

b) Bestimmen Sie eine Funktion $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, so dass die Phasenkurven von $(***)$ auf den Niveaumengen $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \varphi(x,y) - c = 0\}$ mit $c \in \mathbb{R}$ liegen.

c) Skizzieren Sie das Phasenporträt, hierin insbesondere die Lösungskurven (mit Richtungspfeilen), die auf den Gleichgewichtspunkt zu bzw. von ihm weg laufen. Von welchem Typ (Knoten, Sattel usw.) ist der Gleichgewichtspunkt?