Thema Nr. 1

(Aufgabengruppe)

Es sind alle Aufgaben dieser Aufgabengruppe zu bearbeiten!

Bei den folgenden Aufgaben sind alle Schlussfolgerungen und nichttrivialen Rechnungen mit einem erklärenden Text zu begründen. Auf jede Aufgabe werden maximal 6 Punkte vergeben; die höchste erreichbare Punktezahl beträgt 30 Punkte.

Aufgabe 1:

a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$u'' = -4u + 4u'.$$

b) Gegeben sei die Differentialgleichung

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0 \text{ für } x > 0.$$

Durch die Substitution $x = e^t; y\left(e^t\right) = u(t)(x > 0)$ geht die obige Differentialgleichung in eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten für $u(t)$ über. Wie lautet diese? Geben Sie die allgemeine Lösung der ursprünglichen Differentialgleichung $(x > 0)$ an.

Aufgabe 2:

Gegeben sei das gewöhnliche Differentialgleichungssystem

$$\dot{x} = y, \qquad \dot{y} = -x + x^2 \qquad (*)$$

a) Bestimmen Sie alle Gleichgewichtspunkte von $(*)$.

b) Bestimmen Sie für jeden Gleichgewichtspunkt das dazugehörige linearisierte System und untersuchen Sie dieses jeweils auf Stabilität.

c) Bestimmen Sie ein erstes Integral für $(*)$.

Fortsetzung nächste Seite!

Aufgabe 3:

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem von Lösungen zu

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Welche Lösungen bleiben für $t \to +\infty$ beschränkt?

Aufgabe 4:

Berechnen Sie die vier Integrale

$$I_k = \frac{1}{\pi i}\int_{\gamma_k} \frac{e^\zeta}{\zeta^2 - i} d\zeta$$

für $k = 1,2,3,4$ wobei $\gamma_k(t) = i^k + e^{it}, t \in [0,2\pi]$.

Aufgabe 5:

Sei $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ und n eine nichtnegative ganze Zahl. Sei weiter $a > e$. Zeigen Sie, dass die Gleichung $e^z = az^n$ in $\mathbb{D}$, gezählt mit Vielfachheiten, genau n verschiedene Wurzeln besitzt.